doi: 10.15940/j.cnki.0001-5245.2024.03.001

非微扰的极早期宇宙现象学: 共振的原初扰动与非高斯尾巴*

蔡一夫[1,2†]　何鑫宸[1,2]　马潇汉[1,2]

(1 中国科学技术大学物理学院天文学系 合肥 230026)
(2 深空探测实验室 合肥 230026)

摘要 在精确宇宙学的时代, 多信使、高精度、小尺度的宇宙学观测在帮助人们从更加深刻的层面理解宇宙极早期的同时, 也给基于线性近似和微扰展开宇宙学扰动理论带来了新的挑战. 近年来, 对原初引力波和原初黑洞的搜寻使得研究人员们对早期宇宙在小尺度上的非线性非微扰过程产生了浓厚的研究兴趣. 综述了在宇宙学小尺度上关于原初黑洞产生以及引力波研究取得的诸多进展, 重点关注了使用Mathieu方程的共振效应来研究小尺度功率谱放大以及诱导产生可观测的原初引力波的方法. 此外, 还尝试探讨了非高斯尾巴对原初黑洞形成的影响. 发现Mathieu方程所具备的共振效应可以提供一种有效的方法来刻画原初宇宙中小尺度的非微扰动力学过程, 从而能够更好地理解原初黑洞的形成以及相关的引力波产生机制. 同时, 非微扰的非高斯性在原初黑洞形成中可能会产生不可忽视的影响.

关键词　宇宙学: 暴胀理论, 早期宇宙, 原初引力波, 非高斯性, 原初黑洞

中图分类号: P159;　**文献标识码**: A

1　引言

近些年来, 随着宇宙学观测技术的迅猛发展, 我们已步入精确宇宙学的时代, 并以前所未有的精度和广度来探测我们的宇宙, 揭开宇宙的神秘面纱. 值得注意的是, 来自极早期宇宙的引力波和原初黑洞这两大课题引起了大量研究人员的关注. 这两者都起源于宇宙诞生之初的量子扰动, 堪称为宇宙的“活化石”, 因此针对它们的研究和探测将极大推动人类对于极早期宇宙的认知.

对宇宙原初时期扰动的研究一直以来是宇宙学的核心话题, 恰恰是宇宙学扰动理论的建立使宇宙学正式成为可以被检验的科学. 现代宇宙学的标准理论观点则认为, 今天在宇宙微波背景辐射(Cosmic Microwave Background, CMB)以及大尺度结构(Large Scale Structure, LSS)巡天上所观测到的密度涨落都起源于极早期宇宙时期量子场的涨落[1–5]. 不同的极早期宇宙模型对原初涨落的统计性质, 如功率谱、非高斯性、张量标量比等参数给出了不同的预言, 这使得通过研究原初扰动揭秘宇宙起源成为了可能. 大尺度上对宇宙学扰动的观测似乎表明我们宇宙的原初扰动具有近似标度不变、准绝热、近高斯分布的统计性质[6–7]. 包括暴胀理论在内的反弹、循环、浮现等极早期宇宙图景都需要能够相对自然地解释这些观测事实[8–15]. 其中, 慢滚暴胀模型, 即驱动暴胀的标量场在一段

2023-08-04收到原稿, 2023-11-15收到修改稿

*科技部国家重点研发计划(2021YFC2203100)、国家自然科学基金项目(12261131497)、中国科学院青年交叉团队项目(JCTD-2022-20)、111基地项目(B23042)、中国科学院基础研究领域青年团队项目(YSBR-006)资助

†yifucai@ustc.edu.cn

足够平缓的势能上缓慢演化的暴胀过程, 不仅较为自然地解释了上述观测事实, 同时还具有简洁的理论框架, 因而受到了学界的广泛重视.

然而, 目前在大尺度上的宇宙学观测还不能让我们对极早期宇宙实现全面的认识. 为了解决因果性疑难等观测疑难, 宇宙在极早期的暴胀需要持续约60个e-叠数, 而我们在CMB上所看到的各向异性都来自于在暴胀开始约7个e-叠数时间内穿过哈勃半径的扰动模式. 对于它们的研究只能一定程度上揭示宇宙在暴胀过程早期的情况, 想要全面地研究暴胀过程甚至整个极早期的宇宙, 我们不得不试图去搜寻原初扰动在小尺度上所留下的踪迹. 如图1所示, 在稍晚的时间退出视界的那些扰动模式携带着更多关于暴胀过程的信息, 它们对应着小尺度上的原初扰动, 包含着丰富的现象学价值.

由于引力相互作用的非线性本质, 我们在小尺度上观测原初扰动困难重重. 小尺度扰动所携带的原初信息被宇宙演化过程中复杂的天体物理过程所污染, 因此我们必须另辟蹊径. 研究原初黑洞和原初时期产生的引力波就是两种可能的方案.

与天体物理起源的黑洞是大质量恒星的遗骸不同, 原初黑洞诞生于重子物质产生之前, 由原初宇宙中的过大扰动直接坍缩形成[16–18]. 因此原初黑洞不仅可以作为今天我们尚未观测到的暗物质候选者[19–25], 作为中等质量黑洞解释激光干涉仪引力波天文台(Laser Interferometer Gravitational-wave Observatory, LIGO)合作组所探测到的部分引力波事件[26–27], 还为今天在高红移处观测到的超大质量黑洞提供了可能的黑洞种子[28–32]. 原初黑洞的形成理论认为, 当在暴胀时期退出哈勃半径而冻结的原初扰动在暴胀结束后重新进入视界时, 振幅超过坍缩阈值的扰动就会在引力作用下坍缩形成原初黑洞. 因此对原初黑洞的丰度和质量函数计算高度依赖于相应尺度原初扰动的统计性质, 如原初扰动功率谱、非高斯性等. 反之, 对原初黑洞的搜寻和讨论能够帮助我们了解原初扰动在小尺度上的性质. 在利用原初黑洞解释上述不同的天体物理观测结果的理论模型中, 原初黑洞必须是宇宙物质世界中不可忽略的组分, 我们自然希望在宇宙的原初扰动能够产生所需丰度的原初黑洞. 但简单的计算表明若原初扰动在更小的尺度上依然服从高斯统计且其功率谱仍保持近标度不变, 那么宇宙中的原初黑洞丰度可忽略不计. 要产生可被观测到的原初黑洞, 至少需要在小尺度上使标量扰动的功率谱相较于大尺度放大数个量级或是使其偏离高斯统计并倾向于产生更大的扰动[1].

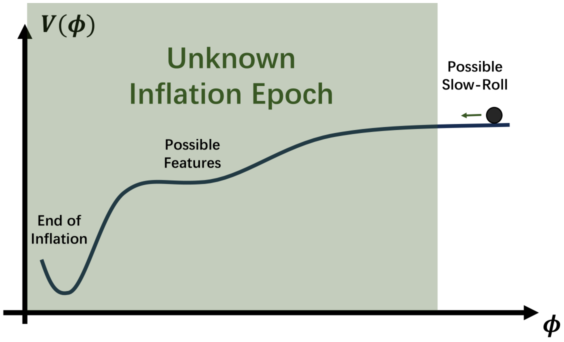


图 1 一种可能的暴胀模型势能示意图, ϕ是暴胀子场, $V(\phi)$是暴胀子的势能. 在图示的暴胀理论中, 暴胀子在势能的驱动下从右向左演化. 大尺度上的观测结果倾向于一个慢滚的暴胀, 即暴胀子在一个平缓的势能曲线上缓慢滚动. 这些观测对应的原初扰动仅反映了暴胀开始的约7个e-叠数时间内的动力学特征, 对于剩下约50个e-叠数时间里的暴胀过程(在图中的绿色区域)我们仍然知之甚少, 可能会存在破坏慢滚条件的演化行为. 慢滚条件的破坏可能会导致原初扰动的统计性质发生改变, 可以通过标度依赖性、非绝热扰动、非高斯性等体现在对小尺度原初扰动的观测中.

Fig. 1 A possible inflationary model potential sketch. In the illustrated inflationary theory, the inflaton evolves from right to left under the influence of the potential energy. Observational results at large scales tend to favor a slow-roll inflation, where the inflaton slowly rolls down a gently sloping potential curve. These observations only reflect the dynamical features within approximately 7 e-folds from the beginning of inflation (shown in the right white in the figure). For the remaining about 50 e-folds of inflation (in the green region in the figure), we still have limited knowledge, and there may be evolutionary behaviors that violate the slow-roll conditions. The breakdown of slow-roll conditions could lead to changes in the statistical properties of primordial perturbations, which can be manifested in observations of small-scale primordial perturbations through scale dependence, non-adiabatic perturbations, non-Gaussianity, and other effects.

[1]最新的随机引力波背景观测指出, 如果脉冲星阵列所观测到的随机引力波信号是原初标量扰动所诱导的, 那么会产生过多的原初黑洞. 对非高斯性的研究也有助于解决这一问题.

在暴胀宇宙学图景当中, 更小尺度的原初扰动取决于暴胀子在暴胀阶段更晚时期的动力学行为. 如图1所示, 在我们未知的约50个e-叠数的暴胀过程中, 暴胀子可能经历一些非平凡的演化过程, 这些过程对慢滚条件的破坏就有可能放大原初功率谱或产生非高斯性. 近年来, 学界有相当数量的模型通过在暴胀过程中构造非平凡的势能来放大原初扰动功率谱. 以超慢滚暴胀为代表的一大类非吸引子暴胀模型[33–37], 及当暴胀子势能中存在向上(向下)的鼓包(坑洼)时都会破坏暴胀的慢滚条件[38–39]. 通过适当选择势能曲线的参数, 原初曲率扰动$\mathcal{R}$的功率谱在特定的尺度范围内可以放大到$P_{\mathcal{R}} \sim 10^{-2}$, 进而产生足够丰度的原初黑洞. 这类模型往往需要仔细调整暴胀子场的势能, 以保障暴胀过程可以顺利地进行. 在对非吸引子暴胀模型更进一步的研究中[35, 37, 40]发现暴胀子势能上存在的非平凡结构不仅可以放大在特定尺度的原初扰动功率谱, 还对这些原初扰动的非高斯性有非平凡的影响. 正如前面所提到的, 原初扰动的功率谱和非高斯性都会对原初黑洞的丰度产生显著的影响. 因此在非吸引子模型中的非平凡非高斯性对讨论原初黑洞有非凡的意义.

当原初扰动严格遵循高斯统计时, 功率谱即两点关联函数(二阶矩)已经描述了所有的统计信息. 在CMB和LSS的观测中, 人们常使用非高斯参数$f_{\rm NL}$等来讨论原初扰动对高斯统计的偏离, 这些参数实际上衡量了原初扰动概率分布函数高阶矩的大小. 在传统的非高斯性研究中, 人们通常使用In-In形式通过微扰论的方法计算原初曲率扰动的有限多点关联函数. 这个思路成功地帮助人们刻画了大尺度原初扰动在均值附近的统计性质, 但随着人们对非高斯性对原初黑洞形成影响的研究, 非高斯尾巴进入了人们的视野. 由于原初黑洞的丰度取决于扰动在塌缩阈值以上的概率, 基于微扰展开的非高斯参数有时并不能很好地刻画这一概率. 非吸引子模型可能会产生严重的非高斯尾巴, 使我们往往需要使用δN方法或基于随机暴胀的Fokker-Planck方程得到扰动的完整概率密度函数才能够计算原初黑洞的丰度. 我们在本文的第3节中, 使用一个简单的例子概述了非高斯尾巴的相关研究.

除了修改暴胀子势能实现功率谱在小尺度上的放大, 在具有非正则动能项的暴胀模型或暴胀的有效场论模型中允许扰动模式具有非平凡的声速$c_{\rm s}$, 即$c_{\rm s}^2 \neq 1$. 非平凡的声速同样可以在小尺度上放大原初扰动的功率谱, 用于讨论原初黑洞的产生[41–43]. 近年来使用参数共振机制放大原初扰动功率谱的工作也得到了学界的重视. 在扰动理论中我们将暴胀子的运动方程分为背景和扰动两个部分, 与前述放大功率谱的模型不同的是, 声速共振机制并不需要修改背景的运动方程. 声速共振机制通过构造特殊的声速行为使扰动的运动方程满足参数共振条件进而将特定模式的扰动共振放大数个量级. 参数共振机制在宇宙学当中最初被用于在暴胀结束后再热时期热化我们的早期宇宙[44–49], 其高效地产生粒子数的行为被人们认为是一种可以解析描述的非微扰过程因而得到了广泛的应用. 在2018年, 这种机制被首次用于放大原初扰动的功率谱并产生单色质量函数的原初黑洞[50], 并进一步推广到张量扰动的情形中, 在声速共振放大标量扰动的同时讨论其诱导引力波的产生.

由于引力波与物质的相互作用十分微弱, 我们可以通过引力波来研究原初时期发生的物理过程. 在小尺度上放大的标量扰动功率谱在塌缩形成原初黑洞时同样也会产生引力波的信号, 这种引力波被称为标量诱导引力波. 标量诱导引力波是一种重要的随机引力波背景信号的波源候选者, 可以解释脉冲星计时阵列所观测到的nHz频段的随机引力波背景信号[51–53]. 由声速共振机制产生的标量诱导引力波不同于常规的标量扰动引力波, 在暴胀时期亚视界尺度的贡献不可忽略, 因此其能谱有独特的双峰特征. 在多场模型中声速共振机制带来了更多的可能性, 因为多场暴胀中曲率扰动退出哈勃视界之后并不会冻结. 在第二个场贡献等曲率扰动时, 甚至可以通过声速共振机制在不放大曲率扰动的情况下放大张量扰动. 这一机制可以用于构造Lyth约束的一个反例, 在小场暴胀模型中提供较大的张量-标量比r[54].

参数共振机制在放大扰动量时往往不需要修改背景物理量的运动方程, 因此可以直接推广到更一般的运动方程当中. 比如使用参数共振效应可

以放大引力波信号. 在一些修改引力理论当中如Horndeski引力中, 引力波的波速不一定是常数. 尽管现有的近邻宇宙的引力波观测事例对宇宙晚期引力波的波速给出了非常严格的限制, 但在更大的宇宙尺度上仍有丰富的可能性. 当引力波的波速具有特殊的振荡行为时, 引力波的运动方程可以重写为Mathieu方程, 进而在共振频率上放大来自宇宙早期的引力波信号[55]. 在未来的引力波观测试验平台上有希望对这一理论预言做出检验. 将参数共振应用于原初电磁场与暴胀子场的非最小耦合模型中可以解释原初磁场的起源[56]; 考虑特殊介质中引力波与电磁场的相互作用时, 参数共振机制能够非微扰地描述引力子产生光子的行为[57].

随着宇宙学观测精度的提高和理论的丰富, 我们已经开始踏足非微扰和非线性问题的领域, 这些问题通常很难描述和求解, 而参数共振宇宙学和非高斯尾巴的研究恰恰为这些复杂问题中的一小类问题提供了可能的理论工具. 本文以这两种现象学模型为例子, 综述了近年来使用参数共振和δN方法研究这类超越微扰论问题的工作, 希望能够增进我们对这些问题的理解. 本文的正文主要分为两个部分, 我们在第2节中介绍参数共振的基本理论和应用, 在第3节中介绍非高斯尾巴的非微扰性质以及如何使用δN方法计算非高斯尾巴.

在本文中, 我们使用自然单位制, $\hbar = c = 1$, 约化普朗克质量为$M_{\rm pl} \equiv \sqrt{\frac{\hbar c}{8\pi G}}$, 度规号差约定为$(-,+,+,+)$.

2 早期宇宙的参数共振

参数共振是物理学中的一种重要现象, 它普遍存在于各种物理系统中并拥有悠久的研究历史. 在荡秋千时, 秋千随人体节律摆动而越荡越高的现象就依赖了参数共振机制. 系统在其参数周期性变化下产生的不稳定性即参数共振, 共振只在特定参数空间中产生, 而当参数退出共振区域时共振即停止. 这种不稳定性往往表现为方程的解具有指数增长的行为, 因此可以使微小的物理效应变得显著. 参数共振作为描述非微扰现象的可能机制在宇宙学中得到了广泛应用.

在宇宙学中的再热过程里参数共振机制扮演了重要的角色[44–46]. 在现代极早期宇宙学理论中为了产生一个致密且炽热的年轻宇宙, 需要一个再热过程来将暴胀结束后的暴胀子场转变为标准模型中的基本粒子. 为了保证宇宙热化的效率, 需要暴胀子场非微扰地衰变为标准模型中的粒子. 一种广为接受的方案即参数共振: 通过暴胀子和物质场的耦合使物质场的演化有参数共振行为, 极大地提高了再热的效率, 也为这样的非微扰过程提供了一种可能的理论描述.

在这一部分, 我们将介绍近年来在宇宙学扰动理论中通过引入参数共振机制来研究极早期宇宙现象学的新进展. 在第2.1节中我们将介绍通过原初扰动的声速共振来产生原初黑洞的机制, 在第2.2节中我们将通过参数共振放大产生在未来可以被观测到的引力波信号, 对宇宙尺度上的引力理论和原初引力波的性质进行探讨, 在第2.3节中我们将介绍目前在早期宇宙研究中参数共振效应的其它新应用, 包括解释原初磁场的产生等.

2.1 参数共振与原初黑洞

在本节中, 我们将探讨基于Mathieu方程共振效应的参数共振机制, 以此来解释原初黑洞的生成. 我们接下来将展示, 振荡的声速项如何引起原初功率谱在小尺度上的增强, 并尝试提出可能的物理模型以实现这一过程. 接着, 我们将研究双场暴胀模型中的参数共振效应, 并通过引入熵扰动来实现现象学上的可控不稳定性.

声速共振作为一种新型原初黑洞生成机制, 最初由Cai等[50]于2018年提出. 他们的研究发现, 在暴胀期间引入一个具有振荡行为的声速参数可以引起原初密度扰动特定模函数的参数共振放大, 相应的原初密度扰动功率谱可以在小尺度上存在一个狭窄的主峰, 进而高效地产生具有特定质量函数的原初黑洞, 同时在大尺度上保持近标度不变, 符合CMB观测和LSS巡天观测.

在基于暴胀理论的标准宇宙学扰动理论中, 原初密度扰动起源于暴胀时期哈勃视界内的量子涨落. 这些量子涨落被加速膨胀的时空背景拉伸出哈勃半径, 并在暴胀结束后的辐射为主时期重新进入哈勃半径内形成原初的经典扰动. 我们可

以用规范不变量——共动规范下的曲率扰动$\mathcal{R}$描述原初宇宙的不均匀性. 需要指出的是, 均匀能量密度规范下的曲率扰动ζ在超哈勃视界尺度上与$\mathcal{R}$相等, 因此本文中无特别解释的情况下对两者不作区分. 对于具有非平凡形式的声速的原初扰动[58–59], 我们可以使用正则变量$v \equiv z\mathcal{R}$讨论, 其中$z \equiv \sqrt{2}\epsilon a/c_{\rm s}$, $\epsilon \equiv -\dot{H}/H^2$, $a = a(t)$为标度因子, 哈勃常数$H \equiv \dot{a}/a$, 上标"·"表示对宇宙时间t的导数. 在讨论宇宙演化时也常用共形时间τ, 定义为$\mathrm{d}\tau \equiv \mathrm{d}t/a$, 上标"′"表示对$\tau$的导数. 波数为$k$的扰动模式$v_k$的演化遵从Mukhanov-Sasaki方程: $v_k'' + (c_{\rm s}^2\, k^2 - z''/z)v_k = 0$.

为了得到在特定k模式共振放大的原初扰动, Cai等[50]考虑对声速项$c_{\rm s}^2$做如下参数化:

$$c_{\rm s}^2 = 1 - 2\xi\left[1 - \cos(2\, k_*\tau)\right]\,,\ \tau > \tau_0\,, \tag{1}$$

其中ξ为振幅, k_*为振荡频率. 为了保证声速平方的正定性, 振幅需要满足$\xi < 1/4$. 假设声速振荡于τ_0时刻开始, 这时k_*模式对应的尺度远小于哈勃半径, 即$|k_*\tau_0| \ll 1$. 为简化分析, 假设在τ_0时刻前$c_{\rm s} = 1$并平滑过渡到振荡阶段. 为了解析计算的方便, 对背景动力学做de Sitter (dS)近似. 根据(1)式的参数化, 将扰动方程中的有效质量项展开到一阶:

$$\frac{z''}{z} = \frac{2}{\tau^2} - \frac{4\xi k_*}{\tau}\sin(2k_*\tau) + 4\xi k_*^2\cos(2k_*\tau) + \mathcal{O}(\xi^2)\,. \tag{2}$$

对于亚哈勃视界的模式, 前两项可以忽略, 扰动方程近似为标准形式的Mathieu方程:

$$\frac{\mathrm{d}^2 v_k}{\mathrm{d}x^2} + (A_k - 2q\cos 2x)v_k = 0\,, \tag{3}$$

其中$x \equiv -k_*\tau$, $A_k = k^2/k_*^2 + 2q - 4\xi$, $q = 2\xi - (k^2/k_*^2)\xi$. Mathieu方程的解在特定波数区间内体现出Floquet不稳定性, 具有指数增长的行为. 此外, 由于ξ总是很小, 有$|q| \gg 1$, 即共振效应只发生在特征频率$k = nk_*$ (n为整数)附近很窄的范围内. 基于这种窄共振特性, 声速共振机制可以产生区别于其他机制的近似单色质量分布的原初黑洞. 由于第一个共振峰较其他共振峰增强更为显著, 原初黑洞形成主要依赖第一个共振峰, 因此下面仅考虑k_*附近的共振模式. 考虑dS近似, 选取初始模函数为Bunch-Davies (BD)真空态$v_k(\tau_0) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\tau_0}/\sqrt{2k}$, 对方程数值求解. Cai等[50]发现, 如图2, 对于$k \neq k_*$模式不会产生共振, 在哈勃视界内$v_k \sim \mathrm{const}$; 而在退出哈勃视界后$v_k(\tau) \sim 1/\tau$, 与一般的BD真空态一致. 而对于k_*模式, 当$\tau > \tau_0$后即进入共振, 在哈勃视界内, 它的放大行为可以由指数增长刻画:

$$v_{k_*}(\tau) \propto \exp(\xi k_*\tau/2)\,, \tag{4}$$

见图2的绿色曲线.

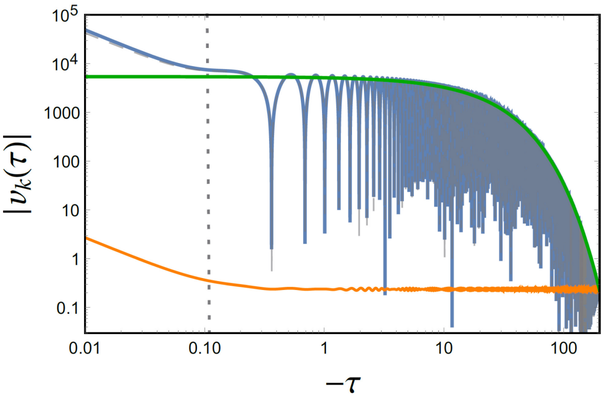


图 2 共振模式k_*的参数放大. 共形时间从右到左演化. 在dS近似下和Starobinsky暴胀模型下的数值结果分别由蓝色实线和灰色虚线给出. 绿色实线是(4)式给出的解析轮廓, 橙色实线代表不发生共振的模式$k \neq k_*$. 垂直点线表示k_*模式退出哈勃视界的时刻. 该图片引用自文献[50].

Fig. 2 Amplification of the Resonant Mode k_*. Conformal time evolves from right to left. The numerical results for the dS approximation and the Starobinsky inflation model are represented by the solid blue and dashed gray lines, respectively. The green solid line represents the analytical profile given by Eq. (4). The orange solid line corresponds to the mode $k \neq k_*$ that does not undergo resonance. The vertical dotted line indicates the moment when the k_* mode exits the Hubble horizon. The figure is sourced from Ref. [50].

当模式退出哈勃视界后有效质量项的第一项主导, 共振即停止, 相应的曲率扰动$\mathcal{R}_k$也停止演化. 作为具体的例子, 文献[50]给出了Starobinsky暴胀模型[60]下的共振模函数$v_k(\tau)$的数值解, 如图2, 对比可以看出dS近似可以很好地描述共振模函数的演化, 同时也说明声速共振机制不依赖于具体的背

景演化动力学. 对于曲率扰动的傅里叶模式$\mathcal{R}_k$, 波数为k_*的模式$\mathcal{R}_{k_*}$在哈勃视界内的演化遵循

$$\mathcal{R}_{k_*}(\tau) \simeq \mathcal{R}_{k_*}(\tau_0)\mathrm{e}^{\xi k_*(\tau-\tau_0)/2}\tau/\tau_0 .$$

当$\tau = -1/k_*$时k_*模式退出哈勃视界, $\mathcal{R}_{k_*}$的演化被冻结, 其被放大的振幅为:

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{k_*} &\simeq \mathcal{R}_{k_*}(\tau_0)\left(\frac{-1}{k_*\tau_0}\right)\mathrm{e}^{-\xi k_*\tau_0/2}\\ &\simeq \frac{H}{\sqrt{4\epsilon k_*^3}M_{\mathrm{Pl}}}\mathrm{e}^{-\xi k_*\tau_0/2},\end{aligned}$$

其中BD真空态给出$\mathcal{R}_{k_*}(\tau_0) = \frac{-H\tau_0}{\sqrt{4\ k_*}\epsilon M_{\mathrm{Pl}}}$.

原初曲率扰动的功率谱$P_{\mathcal{R}} \equiv k^3\left|\mathcal{R}_k\right|^2/(2\pi^2)$具有如下特征: 对于模式$k \neq k_*$, 我们得到标准的标度不变功率谱$P_{\mathcal{R}} = \frac{H^2}{8\pi^2\epsilon M_{\mathrm{Pl}}^2}$; 对于共振频率$k_*$, 功率谱得到指数放大$P_{\mathcal{R}} = \frac{H^2}{8\pi^2\epsilon M_{\mathrm{Pl}}^2}\mathrm{e}^{-\xi k_*\tau_0}$, 如图3所示.

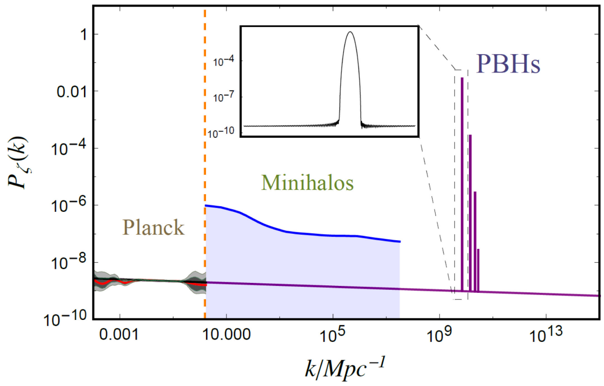


图 3 由声速共振导致的带有尖峰的原初曲率扰动功率谱, 及它与多种观测窗口[61]的比较. 共振模式$k_* = 7\times10^9\ \mathrm{Mpc}^{-1}$处的第一个共振峰最为显著, 相比位于$2k_*, 3k_*, 4k_*, \cdots$的共振峰大至少两个数量级. 该图片引用自文献[50].

Fig. 3 The primordial curvature perturbation power spectrum with sharp peaks induced by sound speed resonance, along with its comparison with various observational windows[61]. The first resonance peak at the resonant mode $k_* = 7\times10^9\ \mathrm{Mpc}^{-1}$ is the most prominent, being at least two orders of magnitude larger than the peaks located at $2k_*, 3k_*, 4k_*, \cdots$. The figure is sourced from Ref. [50].

放大因子$\mathrm{e}^{-\xi k_*\tau_0}$源于两个效应的共同作用: 由振幅$\xi$控制的声速振荡; 以及$k_*$从开始共振到退出哈勃视界间的宇宙膨胀$-k_*\tau_0 = \tau_0/\tau_* \simeq \mathrm{e}^{\Delta N}$, 其中$\Delta N$是这段暴胀时期的e-叠数. 由简单估算, 即使对于非常小的声速振荡振幅$\xi \sim 10^{-4}$, 和很小的e-叠数$\Delta N \simeq 12$已经足够使功率谱的峰值达到$\sim \mathcal{O}(1)$. 我们仅保留k_*模式, 利用δ函数进行参数化:

$$P_{\mathcal{R}}(k) \simeq A_{\mathrm{s}}\left(\frac{k}{k_{\mathrm{p}}}\right)^{n_{\mathrm{s}}-1}\left[1+\frac{\xi k_*}{2}\mathrm{e}^{-\xi k_*\tau_0}\delta(k-k_*)\right], \tag{5}$$

其中$A_{\mathrm{s}} \simeq 2\times10^{-9}$是标准功率谱的振幅, n_{s}是在中心尺度$k_{\mathrm{p}} \simeq 0.05\ \mathrm{Mpc}^{-1}$的谱指数[62]. δ函数之前的系数由用三角形近似估算主峰面积得到的. 现在讨论原初功率谱的增强导致原初黑洞的形成. 由于原初功率谱的共振峰很窄($\sim \xi k_*$), 只有接近共振频率k_*的模式能得到足够大的振幅来坍缩成为黑洞. 在模式退出哈勃视界之后, 如果来自这些模式的密度扰动大于一临界值δ_{c}, 那么在模式重新进入哈勃视界后将会由于引力坍缩成为黑洞. 由于我们在宇宙学扰动理论的框架下讨论, 要求原初曲率扰动功率谱的第一个共振峰的峰值小于1, 即$P_{\mathcal{R}} < 1$, 这将给出相关参数的限制. 声速共振机制形成的原初黑洞可以在较宽的参数范围内构成暗物质并且容易满足实验限制. 通过计算当今质量为M_{PBH}的原初黑洞对于暗物质的占比[27], 记为$f_{\mathrm{PBH}}(M)$, 得到结果如图4所示. 对于不同的共振频率k_*, 对应的f_{PBH}为k_*周围的窄峰, 如图4红色虚线所示; 改变k_*的值, f_{PBH}的尖峰可以形成一条包络线, 如图4黄色实线所示. 由前面的讨论, 我们知道f_{PBH}主要取决于声速振荡的振幅ξ以及从声速振荡开始时刻τ_0到模式k_*退出视界间宇宙的e-叠数ΔN. 根据图4中的多种观测限制, 我们得到声速共振机制参数空间ξ和ΔN的限制, 如图4. 可以看出即使限制在微扰框架内, 声速共振机制依然有广阔的参数空间.

至此, 我们初步讨论了声速共振这一产生原初黑洞的机制, 但声速共振机制仍然是一个现象学上的理论, 其底层物理和模型实现尚不清楚. 值得注意的是, 非平凡的声速是具有非正则动能项暴胀模型的典型特征, 如k-暴胀[58–59], Dirac-Born-Infeld

(DBI)暴胀[63–64]等. 作为对这一问题的初步考查, Chen等[65]考虑了DBI暴胀模型对形如(1)式的非平凡声速的具体实现. DBI作用量写作:

$$S=\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\left[f(\phi)^{-1}(1-\sqrt{1-2f(\phi)X})-V(\phi)\right], \tag{6}$$

其中g为度规张量$g_{\mu\nu}$的行列式, $X=-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi$, $f(\phi)$是重定义的翘曲因子, 这里$g^{\mu\nu}$为$g_{\mu\nu}$的逆, ∇_μ为协变导数, 并采用爱因斯坦求和约定. 由此给出的声速平方

$$c_{\rm s}^2 = 1 - f(\phi)\dot{\phi}^2\,, \tag{7}$$

衡量了暴胀场涨落的传播速度[59]. 为了用DBI实现振荡声速(1)式, 必须满足(7)式和(1)式提供的匹配条件:

$$f(\phi)\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 = 2\xi a(\tau)^2\left[1-\cos(2\,k_*\tau)\right]. \tag{8}$$

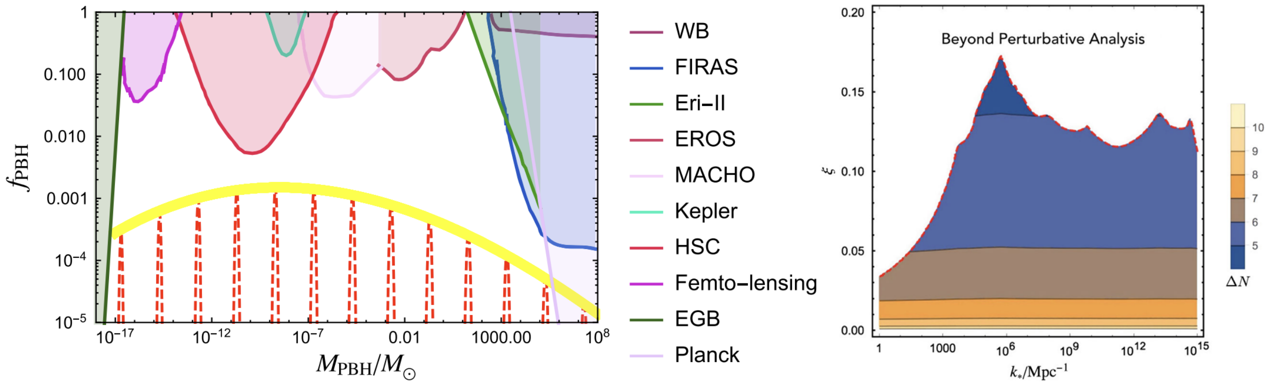


图 4 左图: 对于不同k_*值, 当下原初黑洞能量密度对总暗物质能量密度的占比$f_{\rm PBH}$. 颜色阴影区域表示来自各种天文学实验的观测限制, 包括河外伽马射线背景(EGB), Kepler微透镜, Hyer Suprime-Cam (HSC), 晕族大质量致密天体(MACHO), Experience pour la Recherche d'Objets Sombres (EROS), 远红外绝对分光光度计(FIRAS), 以及Planck卫星[20]. 右图: 左图中多种天文学实验对声速共振机制的参数空间的限制. 白色区域由于微扰论失效而被排除. 该图片引用自文献[50].

Fig. 4 Left: the fraction $f_{\rm PBH}$ of the total dark matter energy density contributed by primordial black holes (PBHs) for different values of the resonant mode k_*. The shaded regions represent observational constraints from various astronomical experiments, including extragalactic gamma-ray background (EGB), Kepler microlensing, Hyper Suprime-Cam (HSC), massive compact halo objects (MACHO), Experience pour la Recherche d'Objets Sombres (EROS), far-infrared absolute spectrophotometer (FIRAS), and the Planck satellite[20]. Right: constraints from various astronomical experiments in the parameter space of the sound speed resonance mechanism depicted in the left figure. The white region is excluded due to the breakdown of perturbation theory. The figure is sourced from Ref. [50].

当给定特定形式的翘曲因子, 利用匹配条件并结合Friedmann方程就可以给出拥有振荡声速的暴胀场ϕ的演化, 同时确定哈勃参数H以及势$V(\phi)$. 为了求解这组高度耦合的方程, 文献[65]中使用微扰法求解背景动力学. 依据声速平方的演化形式, 整个暴胀阶段被分离成非振荡和振荡阶段. 在第一阶段, 假设声速平方为一个略微偏离单位值的常数, 并通过应用Anti de-Sitter (AdS)翘曲因子[66]$f(\phi)=\lambda/\phi^4$求解暴胀场的背景演化. 而在第二阶段, 振荡项的引入需要对类AdS的翘曲因子做相应的轻微修改, 增加一项经典微扰:

$$f(\phi)=\frac{\lambda+\delta(\phi)}{\phi^4}\,. \tag{9}$$

为了求得该翘曲因子的形式, 他们限制暴胀子的背景演化几乎不变, 并利用对振荡声速的匹配条件求解这一增加经典微扰的翘曲因子. 进一步的, 利用Hamilton-Jacobi方法[63]获得哈勃参数$H(\phi)$及暴胀场的势$V(\phi)$. 同时, 精确的数值计算方法也被用于求解暴胀场的演化, 其与上述微扰方法得到的

半解析结果符合得非常好. 基于Planck 2018实验数据[67], 他们讨论了可观测量及其对于模型的限制, 结果见文献[65]. 在DBI暴胀中对声速共振机制的实现在一定程度上探讨了声速共振可能的物理起源, 在这些具有非平凡声速的暴胀模型中可能的共振效应导致即使背景慢滚演化, 小尺度的功率谱上标度不变特性仍被破坏进而产生原初黑洞甚至其他宇宙学现象.

在前文中, 我们考虑了单场暴胀模型中绝热扰动的情况. 通过声速共振, 特定的绝热模式在亚哈勃半径尺度上得到共振放大, 而一旦这些共振模式退出哈勃视界, 它们的共振放大便会停止. 在这种情境下, 超哈勃视界尺度上的曲率扰动并没有显著增长, 这对模型构造提出了较高的要求. 因此, 若要在现象学上实现可控的不稳定性, 一种较为简单的方法是引入另一个标量场, 以此携带熵扰动. 我们需要探究在暴胀期间, 这种不稳定性何时及如何发生, 并确保放大的熵扰动最终能转化为曲率扰动. 接下来, 我们将介绍两种双场暴胀模型下的参数共振机制: 一是引入振荡声速的暴胀子-曲率子混合模型[68]; 二是结合类轴子-单调暴胀模型和豫驰模型的双阶段暴胀模型[69].

Chen等[68]在暴胀子-曲率子混合暴胀模型中引入了声速共振机制[70–76], 利用参数共振效应放大了曲率子场所携带的熵扰动, 从而在后暴胀时期增强原初密度扰动. 在传统的暴胀子-曲率子混合模型中[72], 需要同时考虑驱动暴胀的暴胀子场ϕ和曲率子场σ的扰动. 曲率子场σ作为一个弱耦合标量场, 其质量m_σ远小于哈勃参数($m_\sigma \ll H$), 因此在暴胀期间可获得近似标度不变的功率谱和高斯型的扰动$\delta\sigma$. 假设曲率子场σ的势能为二次形式, 即$V(\phi,\sigma) = V(\phi) + \frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma^2$. 总的原初密度扰动由暴胀子场和曲率子场的涨落共同贡献, 其中暴胀子场扰动$\delta\phi$引发标准的绝热扰动, 而曲率子场扰动$\delta\sigma$传播的声速假设在暴胀期间发生振荡. 基于这个假设, 类似(1)式的非平凡声速平方项被引入到曲率子场的运动方程中, 在dS或准dS近似下, 该方程可化简为形如(3)式的Mathieu方程. 与绝热扰动类似, 由于声速共振机制的窄共振效应, 特征尺度$k_{\rm c}$附近的曲率子模式被指数放大, 如图5所示.

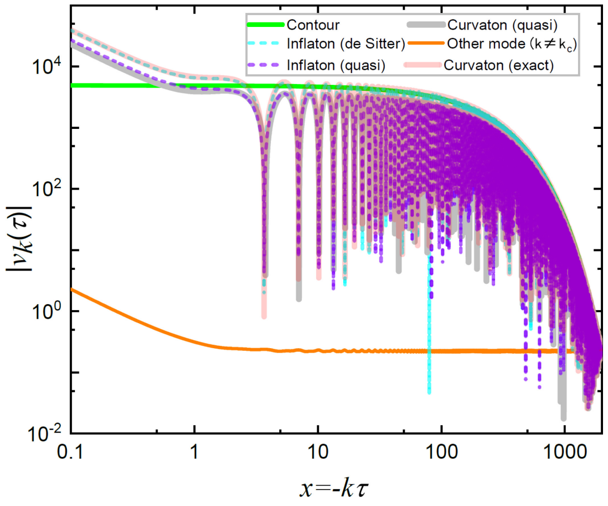


图 5　特征尺度$k_{\rm c}$附近的共振暴胀子和曲率子模式, dS近似和准dS近似结果的比较. 蓝绿色虚线和紫色虚线分别表示在dS近似和准dS近似下的共振暴胀子的数值结果, 可以看出两曲线符合得很好. 灰色实线和粉色实线分别表示在准dS近似下和Starobinsky暴胀模型[60]中的共振曲率子的数值结果. 橙色实线表示不发生共振的模式$k \neq k_{\rm c}$. 模函数的增长由绿色实线描述, 可以由$|v_{k_{\rm c}}(\tau)| \propto \exp(\xi k_{\rm c}\tau/2)$描述. 图片引用自文献[68].

Fig. 5　Comparison of resonant inflaton and curvature perturbation modes near the characteristic scale $k_{\rm c}$ in the dS approximation and the quasi-dS approximation. The dashed cyan and purple lines represent the numerical results for the resonant inflaton mode in the dS approximation and quasi-dS approximation, respectively, showing good agreement between the two curves. The solid gray and pink lines represent the numerical results for the resonant curvature perturbation mode in the quasi-dS approximation and the Starobinsky inflation model[60], respectively. The orange solid line corresponds to the mode $k \neq k_{\rm c}$ that does not undergo resonance. The growth of the mode function is described by the green solid line, which can be approximated as $|v_{k_{\rm c}}(\tau)| \propto \exp(\xi k_{\rm c}\tau/2)$. The figure is sourced from Ref. [68].

以上分析表明, 在近dS近似下, 经历声速共振的曲率子场的模函数行为与前文中暴胀子场的情形相似, 由Mathieu方程描述的共振放大行为在特征模式退出哈勃视界后即停止. 而在暴胀结束后, 暴胀子场和曲率子场先后衰变为辐射物质, 曲率子携带的熵扰动将转化为绝热扰动, 放大的模函数导致曲率扰动在超哈勃视界尺度上的增强.

暴胀时期, 曲率子携带熵扰动$\mathcal{S}_\sigma \equiv 3(\zeta_\sigma - \zeta_\phi)$, 其中$\zeta_\phi$和$\zeta_\sigma$分别为均匀暴胀子场能量密度$\rho_\phi$切面

和均匀曲率子场能量密度ρ_σ切面上的曲率扰动. 在暴胀结束后, 暴胀子场开始振荡并随后衰变成辐射物质, 此时曲率子保持其原值, 直到哈勃参数H衰减到与曲率子的质量相当($H \sim m_\sigma$). 此后, 宇宙由暴胀子衰变成的辐射物质(能量密度$\rho_R \propto a^{-4}$)和振荡的曲率子(其行为类似非相对论物质, $\rho_\sigma \propto a^{-3}$)组成, 以辐射物质为主. 可以利用$\delta N$形式计算曲率子扰动与熵扰动的关系:

$$m_\sigma^2(\sigma+\delta\sigma)^2 = m_\sigma^2\sigma^2 \mathrm{e}^{\mathcal{S}_\sigma}\,, \tag{10}$$

其在线性阶有$\mathcal{S}_\sigma = \delta\sigma/\sigma$. 假设曲率子最终衰变为辐射物质, 衰变可近似瞬时地发生在$H \sim \Gamma_\sigma$的等哈勃参数切面上, 其中Γ_σ是曲率子的衰变率. 如果曲率子在原初核合成前衰变, 且衰变后所有粒子种类都处于完全热平衡状态, 则衰变后, 宇宙进入完全由辐射物质主导的绝热演化过程. 熵扰动$\mathcal{S}_\sigma$将转化为绝热扰动且此后曲率扰动守恒[72, 77–78]. 线性阶下, 熵扰动对原初曲率扰动ζ_r的贡献写为:

$$\zeta_r = f\zeta_\sigma + (1-f)\zeta_\phi = \zeta_\phi + \frac{f}{3}\mathcal{S}_\sigma\,, \tag{11}$$

其中能量分数f定义为$f = 3\Omega_{\sigma,\mathrm{dec}}/(4-\Omega_{\sigma,\mathrm{dec}}) = 3\rho_\sigma/(3\rho_\sigma+4\rho_R)$, $\Omega_{\sigma,\mathrm{dec}}$为衰变时刻曲率子场能量密度分数. 因此, 总的原初曲率扰动功率谱P_{ζ_r}写为:

$$P_{\zeta_r} = P_{\zeta_\phi} + \frac{f^2}{9}P_{\mathcal{S}_\sigma} = (1+\lambda)P_{\zeta_\phi}\,, \tag{12}$$

其中P_{ζ_ϕ}、$P_{\mathcal{S}_\sigma}$分别为扰动ζ_ϕ和$\mathcal{S}_\sigma$的功率谱. 无量纲参数λ定义为:

$$\lambda = \frac{16}{9}f^2\epsilon(\epsilon-1)^2 c_s^2(\tau_*)k\left|v_k(\tau_*)\right|^2\left(\frac{M_{\mathrm{Pl}}}{\sigma_*}\right)^2\,, \tag{13}$$

用以衡量曲率子场相对于暴胀子场对原初曲率扰动的贡献[72], 其中$\tau_* = -1/k$为k模式出视界的时刻, 下标“$*$”表示物理量在该时刻的取值. 由于曲率子场携带的熵扰动转化为绝热曲率扰动的过程发生在研究关注的模式重新进入哈勃视界之前, 导致曲率扰动在超哈勃视界尺度上的增强, 同时也满足CMB观测对于原初熵扰动的限制[79–80]. 此外, 由于曲率子场始终不主导宇宙演化, 它仅在特定的共振尺度k_c上导致功率谱的放大, 而在其他尺度上相比于暴胀子场扰动的贡献可以忽略, 这使得该模型得到的原初曲率扰动功率谱P_ζ^{tot}在CMB尺度上仍是近标度不变的.

由于引入了曲率子场, 除了声速共振机制涵盖的$\{\xi,\tau_0,k_*\}$参数外, 混合模型的参数还包括f、m、h, 其中能量分数f表示曲率子场能量占总能量的比重; $m \equiv M_{\mathrm{Pl}}/\sigma_*$, $h \equiv H_*/M_{\mathrm{Pl}}$. 有关混合模型参数空间限制的详细讨论, 可参见文献[68].

作为另一种在暴胀期间实现熵扰动的参数不稳定性, 并最终转化为曲率扰动的机制, Zhou等人提出了结合类轴子-单调暴胀模型和豫驰模型的双阶段暴胀模型[69]. 在这个双场模型中, 一个场ϕ具有类轴子-单调的振荡势, 另一个场χ具有类似山顶的上凸形势.

$$V(\phi,\chi) = g\Lambda_0^3\phi + \Lambda^4(\phi)\cos\left(\frac{\phi}{f_\mathrm{a}}\right) + \xi\Lambda_0^3\chi + V_0\,, \tag{14}$$

其中, 有量纲参数Λ_0决定了背景演化的特征能标, 无量纲参数g和ξ是产生斜率的耦合常数. 质量标度f_a决定了振荡特征的周期, 场依赖的势垒振幅$\Lambda(\phi)$设为$\Lambda(\phi) = \Lambda_0(1+\alpha\phi/M_{\mathrm{Pl}})$, α为无量纲的系数. $V(\phi,\chi)$的示意图可见图6.

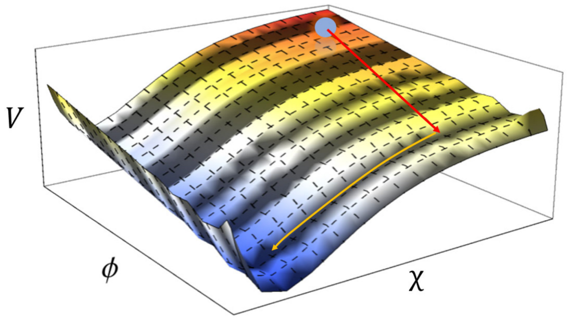


图 6 结合类轴子-单调暴胀模型和豫驰模型的双阶段暴胀模型[69]的势函数$V(\phi,\chi)$示意图. 明暗条纹分别代表场空间中的局部最大值和最小值. 红色和黄色的箭头线描述了暴胀宇宙的背景轨迹. 该图片引用自文献[69].

Fig. 6 A schematic diagram of the potential $V(\phi,\chi)$ for the model in Ref. [69]. The light and dark stripes represent local maxima and minima in the field space, respectively. The red and yellow arrow lines depict the background trajectory of the inflationary universe. The figure is sourced from Ref. [69].

暴胀时期可以分为两个阶段. 第一阶段由ϕ场主导, 其振荡效应随时间逐渐显著. 在第一阶段早期, 由于振荡特征可以忽略, 我们在大尺度上得到近乎标度不变的原初曲率扰动功率谱, 符合CMB实验结果. 在第一阶段的最后几个e-叠数里, 势的周期性振荡导致哈勃半径内的ϕ场扰动$\delta\phi$按类似Mathieu方程的形式演化并被参数共振放大. 对于场扰动的傅里叶模式$\delta\phi_k$, 引入新变量$\delta\Phi_k = a^{3/2}(t)\delta\phi_k$, 扰动$\delta\phi_k$的演化方程写为:

$$\delta\ddot{\Phi}_k + \omega_k^2(t)\delta\Phi_k = 0\,, \tag{15}$$

其中

$$\omega_k^2(t) = \frac{k^2}{a^2(t)} - \frac{\Lambda^4(\phi)}{f_{\rm a}^2}\cos\left(\frac{\phi}{f_{\rm a}}\right) - \frac{9}{4}H^2 - \frac{3}{2}\dot{H}\,. \tag{16}$$

在亚哈勃视界尺度下, 对于小于哈勃时间的时间间隔, 可以近似认为$H \sim {\rm const}$并忽略$\dot{H}$. 这时, 上述方程可以约化为膨胀宇宙背景下的Mathieu方程, 共振的扰动模式k_*得到指数放大. 在χ场扰动$\delta\chi$的演化方程中, 源项正比于$\delta\phi$, 通过计算可以证明, 共振放大的扰动模式$\delta\phi_{k_*}$可以诱导对应的$\delta\chi_{k_*}$在亚哈勃视界尺度的大幅增强, 如图7所示.

当ϕ停在振荡势的某个极小值点时, 暴胀进入第二阶段, 宇宙演化行为此时由χ主导. 实际上, 如图6所示, 在ϕ停留在某个振荡极小值之后, 暴胀的轨迹从ϕ方向转向χ方向. 因此, 第一阶段产生的$\delta\chi$在退出哈勃视界后转化为绝热扰动, 这意味着功率谱在小尺度上主要由场扰动$\delta\chi$决定. 结果曲率扰动在小尺度上获得显著的共振放大, 足以产生大量原初黑洞.

值得指出的是, 共振放大的扰动$\delta\phi$对曲率扰动没有直接效应. 然而, 在暴胀期间, 它们在亚哈勃视界尺度上可以诱导产生张量扰动. 这些张量扰动最终将形成宇宙随机引力波背景, 并且它们的振幅可以比辐射为主时期曲率扰动诱导产生的张量扰动大得多. 在2.2节中, 我们将在参数共振的条件下讨论这一物理现象.

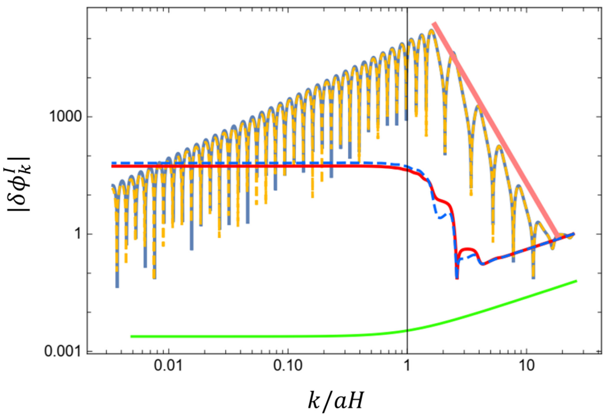


图 7 k_*模式的诱导共振. 参数选取见文献[69]. 红色和蓝色的实线分别是$\delta\phi_{k_*}$和$\delta\chi_{k_*}$的数值解; 黄色和淡蓝色的虚线分别对应它们的近似解. 粉色曲线刻画了由$\delta\phi_{k_*}$的指数增长给出的近似的解析行为. 绿色曲线代表对于不发生共振的k模式$\delta\chi_k$的演化. 该图片引用自文献[69].

Fig. 7 Induced resonance of the k_* mode. The parameter choices are taken from Ref. [69]. The red and blue solid lines represent the numerical solutions of $\delta\phi_{k_*}$ and $\delta\chi_{k_*}$, respectively. The yellow and light blue dashed lines correspond to their approximate solutions. The pink curve depicts an approximate analytical behavior obtained from the exponential growth of $\delta\phi$. The green curve represents the evolution of $\delta\chi_k$ for a mode k that does not undergo resonance. The figure is sourced from Ref. [69].

2.2 参数共振与引力波

2.1节介绍了声速共振这一产生原初黑洞的理论机制, 其中我们单独考虑了早期宇宙中的标量扰动. 值得指出的是, 尽管在线性阶段, 早期宇宙的密度扰动和张量扰动独立演化, 它们在非线性阶段会相互耦合, 作为非线性源诱导随机引力波背景的产生. 人们期望通过观测由过大的原初曲率扰动诱导的随机引力波背景来寻找原初黑洞. 原初黑洞与诱导引力波之间的关联已在相关文献中被广泛研究[81–85], 主要集中在辐射为主阶段, 即原初黑洞形成时引力波的产生. 在声速共振机制[50]的基础上, Cai等[86]分析了辐射为主时期和暴胀时期导致原初黑洞形成的原初密度扰动在非线性阶段诱导的随机引力波背景. 如2.1节所述, 这些原初密度扰动由声速共振效应放大, 在功率谱上呈现出特殊的若干尖峰, 并可能在原初黑洞的质量谱上给出特定的模式. 对于原初密度扰动的功率谱, 我们可以给出如

下参数化:

$$P_{\mathcal{R}}(k)=A_{\rm s}\left(\frac{k}{k_{\rm p}}\right)^{n_{\rm s}-1}\left\{1+\frac{\xi k_*}{2}{\rm e}^{-\xi k_*\tau_i}\left[\delta(k-k_*)+\sum_{n=2}^{\infty}a_n\delta\left(k-nk_*\right)\right]\right\},\tag{17}$$

其中相关参数的定义与前文一致. 在宇宙学扰动理论的框架下, $P_{\mathcal{R}}(k)$的峰值须小于1, 这个条件限制了在暴胀时期和辐射为主时期诱导引力波振幅的上界. 线性密度扰动的不同模式可以非线性地相互耦合并作为产生二阶张量扰动的源. 通常诱导引力波在傅里叶空间里的运动方程如下:

$$h_k^{\lambda''}(\tau)+2\mathcal{H}h_k^{\lambda'}(\tau)+c_{\rm g}^2\,k^2h_k^{\lambda}(\tau)=S_k^{\lambda}(\tau),\tag{18}$$

其中h_k是张量扰动h_{ij}的傅里叶分量, 由于坐标轴选取的任意性, 其只依赖于$k\equiv|\boldsymbol{k}|$; $\mathcal{H}\equiv a'/a$为共动哈勃参数; $\lambda=\times,+$表示引力波的两个极化模式; $c_{\rm g}$为引力波的声速, 在广义相对论中为基本常数光速c. 源项$S_k^{\lambda}(\tau)$在辐射为主时期和暴胀时期分别具有如下形式[87–88]:

$$S_k^{\lambda}(\tau)=4\int\frac{{\rm d}^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\boldsymbol{e}^{\lambda}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{p})\big[3\Phi_{\boldsymbol{p}}\Phi_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}}+\mathcal{H}^{-2}\Phi'_{\boldsymbol{p}}\Phi'_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}}+\mathcal{H}^{-1}\Phi'_{\boldsymbol{p}}\Phi_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}}+\mathcal{H}^{-1}\Phi_{\boldsymbol{p}}\Phi'_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}}\big];\tag{19}$$

$$S_k^{\lambda}(\tau)=4\frac{c_{\boldsymbol{s}}^2}{M_{\rm Pl}^2}\int\frac{{\rm d}^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\boldsymbol{e}^{\lambda}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{p})\delta\phi_{\boldsymbol{p}}(\tau)\delta\phi_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}}(\tau).\tag{20}$$

(19)式中, $\Phi_{\boldsymbol{k}}$为Bardeen势Φ的傅里叶分量; $\boldsymbol{e}^{\lambda}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{p})\equiv{\rm e}_{lm}^{\lambda}(\boldsymbol{k})p_lp_m$为极化投影算符, 定义见文献[82]. (20)式中, $\delta\phi_{\boldsymbol{p}}(\tau)$为暴胀子扰动的傅里叶分量. 我们选择空间平直规范, 在超哈勃视界尺度上, 场扰动$\delta\phi$与曲率扰动$\mathcal{R}$通过$\mathcal{R}=H\delta\phi/\dot{\phi}=\delta\phi/\sqrt{2\epsilon}M_{\rm Pl}$关联.

根据运动方程(18)式和源项(19)式或(20)式我们可以看出, 诱导引力波的两点关联函数可以大致估计为$\mathcal{R}$的两点关联函数的平方. 经过计算, 我们可以得到在辐射为主时期诱导引力波的功率谱[87–88]:

$$P_h^{\rm RD}(k,\tau)=\int_0^{\infty}{\rm d}y\int_{|1-y|}^{1+y}{\rm d}x\left[\frac{4y^2-(1+y^2-x^2)^2}{4xy}\right]^2P_{\mathcal{R}}(kx)P_{\mathcal{R}}(ky)F_{\rm RD}(k,\tau,x,y),\tag{21}$$

其中我们引入变量$x=|\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}|/k$及$y=p/k$. 函数$F_{\rm RD}$包含了功率谱的时间依赖和形状信息, 具体形式见文献[86].

在暴胀时期, 引力波可以在超哈勃视界尺度和亚哈勃视界尺度上被诱导出来, 因此, 暴胀时期诱导引力波的总贡献由这两部分组成. 对于超哈勃视界尺度模式, 经过类似(21)式中的计算, 我们得到诱导引力波的功率谱$P_h^{\rm Super}(k,\tau)$与(21)式形式上相同, 区别来源于将函数$F_{\rm RD}(k,\tau,x,y)$替换成刻画暴胀时期扰动的演化信息的函数$F_{\rm Inf}(k,\tau,u)$, 具体形式见文献[86], 其中$u\equiv k/p_*$. 而对于暴胀期间亚哈勃视界的暴胀场量子扰动$\delta\hat{\phi}_{\boldsymbol{p}}$诱导的引力波信号, 其中上冒号表示量子算符. 我们利用半解析的方法计算出源项(20)式的亚哈勃视界模式在退出哈勃视界时$\tau_*=-p_*^{-1}$的诱导引力波功率谱:

$$P_h^{\rm Sub}(k,\tau_*)=\begin{cases}16\xi^2\epsilon^2A_{\rm s}^2\left(1-\dfrac{u^2}{4}\right)^2\dfrac{1}{u^4}|\mathcal{I}(u,v)|^2, & u>\dfrac{\xi}{2},\\[2ex] 32\xi\epsilon^2A_{\rm s}^2\left(1-\dfrac{u^2}{4}\right)^2\dfrac{1}{u^3}|\mathcal{I}(u,v)|^2, & u<\dfrac{\xi}{2},\end{cases}\tag{22}$$

其中函数$\mathcal{I}(u,v)$的具体形式见文献[86]. 应当指出, 由亚哈勃视界模式诱导的引力波功率谱由$v=-p_*\tau_i$所控制, 它等于共振开始到特征暴胀子扰动模式退出视界的时间$\Delta t={\rm e}^{\Delta N}$, 因此更大的$v$给出更高的引力波功率谱. 对于声速共振机制, ${\rm e}^{\Delta N}\sim\mathcal{O}(100)$, 放大效应十分显著. 然而这种放大并不是没有限制的, 为了保证讨论的有效性, 需要要求$P_{\mathcal{R}}(p_*)<1$和$P_h<1$, 前者对参数的限制已在2.1节给出.

如图8所示, Cai等[86]给出了几组不同参数选取下, 源于(20)式的超哈勃视界模式和亚哈勃视界模式诱导的引力波功率谱. 可见, 亚哈勃视界模式诱导的引力波平均振幅约为超哈勃视界模式的10^{10}倍. 这表明, 诱导引力波在演化到τ_*之后不会产生

显著修正. 从物理上考虑, 由于诱导引力波的波长和特征频率大致在同一量级, 当曲率扰动的特征模式p_*在视界外冻结时, 诱导引力波也会被冻结. 这一结论得到数值结果的验证, 因此暴胀期间诱导引力波主要由亚哈勃视界模式贡献, 即$P_h^{\rm Inf}(k,\tau_{\rm end}) \simeq P_h^{\rm Sub}(k,\tau_*)$. 此外, 暴胀期间的诱导引力波信号强度足够大, 与辐射为主时期的诱导引力波在同一量级, 有望在未来被探测到. 需要指出的是, 暴胀时期亚哈勃视界模式的诱导引力波峰值位于$\xi p_*/2$附近, 不同于暴胀时期超哈勃视界模式以及辐射主导时期的诱导引力波, 它们的峰值均位于p_*附近, 如图8所示. 因此, 暴胀时期和辐射为主时期的诱导引力波信号叠加起来会呈现出双峰特征, 不同于之前的相关研究. 这种双峰结构可以作为声速共振机制的一种实验检验依据, 考虑多个尖峰的原初密度扰动, 其诱导的引力波功率谱相比于单峰情况更加延展.

除了上述基于声速共振机制的工作, Cai等人在后续的工作[54]中提出了增强引力波信号的同时不显著影响暴胀期间原初曲率扰动的新机制, 该机制同样利用参数共振放大的标量场涨落作为非线性源产生诱导引力波. 针对暴胀假说中著名的Lyth界限[89], 即场偏移$\Delta\phi$和张量-标量比(张标比)之间的不等关系

$$\Delta\phi \gtrsim \mathcal{O}(1)\left(\frac{r}{0.01}\right)^{1/2} M_{\rm Pl}\,, \tag{23}$$

参数共振机制给出了该界限的一个明显尺度依赖的反例, 符合有效场论及量子引力等的理论要求[90–92], 为具有亚普朗克场偏移的低能标暴胀产生可观测的张量扰动提供了前景.

在该工作中, Cai等[54]考虑了两个仅通过重力耦合的正则标量场ϕ和χ. 一方面, 无质量场χ负责产生满足观测要求的近标度不变的曲率扰动功率谱. 另一方面, 具有参数共振行为的重场ϕ, 其扰动在暴胀期间被共振放大, 该放大的标量扰动作为非线性源在窄频率范围内产生诱导波, 导致强标度依赖的张标比r.

在空间平直切面上, 扰动$\delta\chi$和$\delta\phi$的傅里叶分量分别随如下方程演化[93–95]:

$$\delta\chi_k'' + 2\mathcal{H}\delta\chi_k' + k^2\delta\chi_k = \frac{\sqrt{2\epsilon_\chi}}{M_{\rm Pl}}\left[\phi''\delta\phi_k + \mathcal{S}_k\right]\,, \tag{24}$$

$$\delta\phi_k'' + 2\mathcal{H}\delta\phi_k' + \left(k^2 + a^2\mathcal{M}_{\rm eff}^2\right)\delta\phi_k = 0\,, \tag{25}$$

其中ϵ_χ表示第一慢滚参数. (24)式的右侧包含了一阶和二阶的贡献, 二阶贡献的具体形式如下[94–95]:

$$\mathcal{S}_k = \int \frac{{\rm d}^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\left\{\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{k}}{k^2}\left[(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k})^2 + \mathcal{M}_{\rm eff}^2\right] - \frac{1}{2}\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p})\right\}\delta\phi_{|\boldsymbol{p}|}\delta\phi_{|\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}|}\,, \tag{26}$$

放大的扰动模式$\delta\phi$在二阶扰动理论背景下作为引力波源. 实际上, 横向无迹的张量扰动模式h_k^λ的传播由(18)式描述, 其中非线性源$S_k^\lambda(\tau)$的形式如(20)式所示, 声速$c_{\rm g}$取单位值$c\equiv 1$.

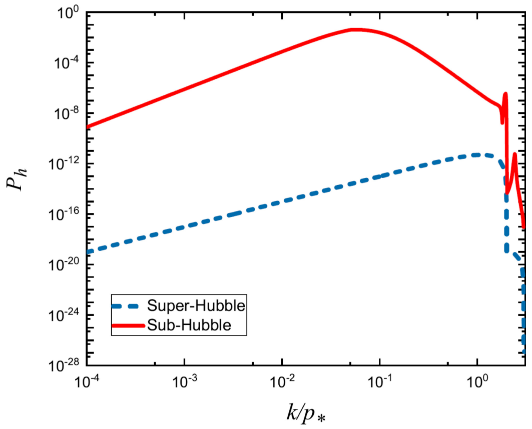


图 8　带有多个尖峰的曲率扰动(17)式的超哈勃视界模式(蓝色虚线)和亚哈勃视界模式(红色实线)所诱导的引力波的功率谱. 由超哈勃视界模式诱导的引力波在暴胀结束$\tau_{\rm end}$时计算, 由亚哈勃视界模式诱导的引力波在模式p_*退出哈勃视界的τ_*时刻计算. 亚哈勃视界模式所诱导的引力波的平均振幅大约是超哈勃视界模式的10^{10}倍. 该图片引用自文献[86].

Fig. 8　The power spectra of gravitational waves induced by curvature perturbations with multiple peaks Eq. (17) for super-Hubble modes (blue dashed line) and sub-Hubble modes (red solid line). Gravitational waves induced by super-Hubble modes are calculated at the end of inflation $\tau_{\rm end}$, while those induced by sub-Hubble modes are calculated at the time τ_* when the mode p_* exits the Hubble horizon. The average amplitude of gravitational waves induced by sub-Hubble modes is approximately 10^{10} times larger than that induced by super-Hubble modes. This figure is sourced from Ref. [86].

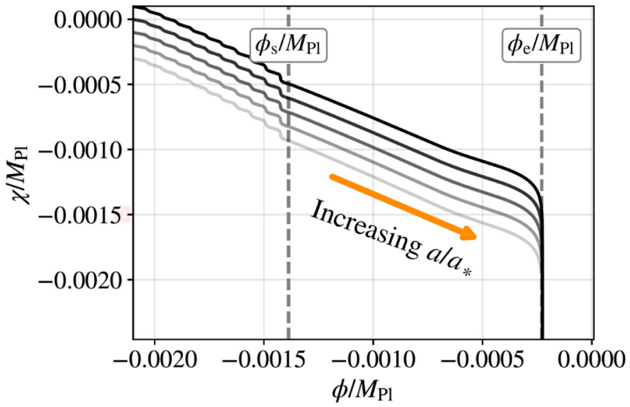
(25)式和(26)式中的有效质量项$\mathcal{M}_{\rm eff}^2$由背景动力学决定. 我们需要构造$\mathcal{M}_{\rm eff}^2$, 使$\delta\phi$模式相对于真空值有显著的增强; 同时需要确保扰动$\delta\chi$不受明显影响, 因为它决定了被观测严格限制的曲率扰动功率谱. 为了达到这些要求, 需要对$\mathcal{M}_{\rm eff}^2$施加3个主要条件:

第一, 在一些感兴趣模式的亚哈勃视界演化期间, $\mathcal{M}_{\rm eff}^2$应表现出振荡特征. 通过(25)式中的振荡项, 扰动$\delta\phi$在共振尺度附近的窄共振带会经历Mathieu型的参数共振放大, 这些放大的模式将诱导引力波.

第二, 在相关模式刚退出哈勃视界时, 要求$\mathcal{M}_{\rm eff}^2$较小, 以抑制$\delta\phi$对$\delta\chi$的非线性反作用, 不破坏近标度不变的曲率扰动功率谱. 同时, 这也使$\delta\phi$在退出哈勃视界后不会迅速衰减, 为共振放大的$\delta\phi$模式留出更多时间增强引力波信号.

第三, 我们要求有效质量项最终变得足够大, $\mathcal{M}_{\rm eff}^2 \gtrsim \mathcal{O}(H^2)$, 以停止$\phi$的演化, 保证$\delta\phi$不会直接影响曲率扰动功率谱.

受到轴子-单调暴胀模型[96–97]和豫驰机制[98–99]的启发, Cai等[54]构造了具体的两场暴胀模型(相关模型产生原初黑洞参考2.1节中类轴子-单调暴胀模型和豫驰模型结合的双阶段暴胀模型[69]), 并选取了一组特定模型参数, 得出了数值结果, 如图9所示. 左图展示了模型的背景动力学, 不同曲线代表不同初始χ值, 当ϕ场停止演化时均收敛于同一轨迹. 场偏移$\Delta\phi$和$\Delta\chi$都被限制, 确保我们仍处于亚普朗克区域. 从右图可以清晰看出$\delta\phi_k$的共振放大, 刚退出哈勃视界后的冻结以及随后的衰减.



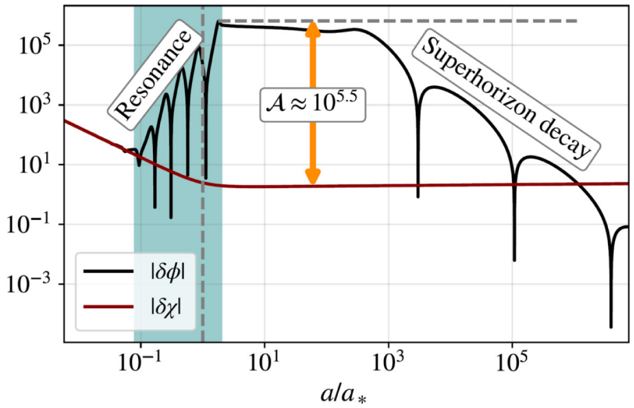


图 9 左图: 在(ϕ,χ)不同初始条件下场空间中背景轨迹的演化. 场偏移为$\Delta\phi\sim\Delta\chi\sim 0.001\ M_{\rm Pl}$, 保持在小场暴胀框架内. 右图: 对于共振带里的模式k_*, 扰动$\delta\phi$ (黑色)和$\delta\chi$ (红色)作为标度因子a的函数, $\delta\phi$当k_*在哈勃视界内经历共振放大, 在k_*穿过哈勃视界后短时间冻结, 并在ϕ稳定在$\phi_{\rm e}$后衰减. 另一方面, $\delta\chi$在哈勃视界内一直衰减并在k_*退出哈勃视界后冻结. $\delta\phi$相对于它的真空值被共振放大了$\mathcal{A}\sim 10^{5.5}$倍. 该图片引用自文献[54].

Fig. 9 Left: evolution of the background trajectories in the field space (ϕ,χ) under different initial conditions. The field displacements are $\Delta\phi\sim\Delta\chi\sim 0.001\ M_{\rm Pl}$, remaining within the small-field inflation framework. Right: evolution of perturbations $\delta\phi$ (black) and $\delta\chi$ (red) as functions of the scale factor a for the modes k_* within the resonance band. $\delta\phi$ undergoes resonance amplification when k_* experiences resonance within the Hubble horizon, briefly freezes after k_* exits the Hubble horizon, and then decays after ϕ stabilizes at $\phi_{\rm e}$. On the other hand, $\delta\chi$ continuously decays within the Hubble horizon and freezes after k_* exits the Hubble horizon. The amplitude of $\delta\phi$ relative to its vacuum value is resonantly amplified by a factor of $\mathcal{A}\sim 10^{5.5}$. The figure is sourced from Ref. [54].

在得到放大的标量模函数后, Cai等[54]数值求得了对应原初张量扰动功率谱P_h, 图10展示了两个不同共振尺度的结果(红色和黑色实线). 我们可以看出引力波相比真空涨落贡献$P_h^{\rm vac}(k)=2H^2/\pi^2M_{\rm Pl}^2$被显著放大, 同时峰值在当下的上界$r\lesssim 0.07$之内. 最后, 他们计算了相关的标量功率谱的非线性修正$P_{\mathcal{R}}^{\rm NL}$, 见图10中红色和黑色虚线. 我们发现这些二阶修正相对于标准线性功率谱不占主

导. 因此, 利用当前的共振机制可以有效避开对功率谱形状和大小的严格观测限制.

在该机制里, 亚哈勃视界的参数共振放大的标量扰动作为非线性源产生诱导引力波, 而增强的张量扰动和曲率扰动源于两个不同的, 仅由引力耦合的部分. 因此, 该机制使得原初张量扰动功率谱P_h相对于Lyth界限对应的真空值$P_h^{\rm vac}$被显著放大, 有$r \gg 16\epsilon_\chi$; 并确保了场偏移$\Delta\phi$、$\Delta\chi$是亚普朗克的, 打破了Lyth界限的理论限制. 同时给出了符合观测限制的标量功率谱. 为了说明该机制的可检测性, Cai等人还计算了CMB B-模式角功率谱并将其与即将到来的LiteBIRD (宇宙微波背景辐射偏振探测卫星)任务的预期灵敏度进行了比较, 见文献[54].

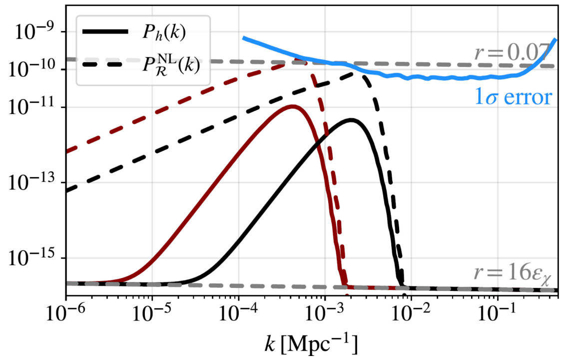


图 10　由共振放大的$\delta\phi$诱导的引力波功率谱, 两个共振模式为$k_* \sim 10^{-3.5}$和$10^{-2.5}$ Mpc^{-1} (分别为红色和黑色实线), 以及对应的曲率功率谱的非线性修正(虚线). 还给出了$r = 16\epsilon_\chi$和$r = 0.07$的近标度不变张量功率谱(灰色虚线), 以及由文献[100]给出的功率谱的$1-\sigma$上限. 该图片引用自文献[54].

Fig. 10　The power spectra of gravitational waves induced by the resonantly amplified $\delta\phi$, corresponding to two resonance modes $k_* \sim 10^{-3.5}$ Mpc^{-1} (red solid line) and $10^{-2.5}$ Mpc^{-1} (black solid line), along with the nonlinear corrections to the corresponding curvature power spectra (dashed lines), are shown. Additionally, the nearly scale-invariant tensor power spectra for $r = 16\epsilon_\chi$ and $r = 0.07$ are depicted (gray dashed lines), as well as the $1-\sigma$ upper limit of the power spectrum given in Ref. [100]. The figure is sourced from Ref. [54].

声速共振机制放大的原初密度扰动可以诱导随机引力波背景, 其具有特殊的双峰功率谱, 并有望在未来的观测中得到验证[86]. Cai等人在工作中[55]指出, 现象学上可以直接将声速共振机制应用于放大原初引力波信号. 对于引力波的运动方程(18)式, 可以令声速$c_{\rm g}$偏离光速$c \equiv 1$并具有振荡特征, 这一行为的理论机制可以由某些修改引力理论给出[101–105]. 为不失一般性, 他们给出了一个模型无关的分析, 对声速进行如下参数化:

$$c_{\rm g}^2 = 1 - \frac{\alpha}{(1+\tau/\tau_0)^2}\cos^2(k_*\tau)\,, \tag{27}$$

其中τ是共形时间, τ_0和k_*分别是特征时间尺度和波数. 为了避免超光速传播, 需要要求$\alpha > 0$. (27)式中的特定时间依赖形式具有充分的物理动机, 其振荡行为来源于类似再热过程中标量场在最小值附近的振荡, 而振幅随时间减小是由宇宙膨胀的哈勃摩擦造成的. 应当指出, $c_{\rm g}^2$在宇宙晚期极限$\tau \to \infty$下趋向于单位值, 满足多信使观测的限制.

类似于上一节中声速共振产生原初黑洞的机制, (27)式中的振荡修正项导致引力波在亚哈勃视界尺度上的窄共振. 在这个尺度下, 可以安全地忽略哈勃摩擦项. 为此, 通过引入变量$x = k_*\tau$, 引力波的运动方程可以近似表示为Mathieu方程的形式:

$$\frac{\partial^2\, h_k}{\partial x^2} + [A - 2q\cos(2x)]\, h_k = 0\,, \tag{28}$$

其中$A = (k^2/k_*^2) - 2q$, $q = \alpha k^2/\left[4\, k_*^2(1+\frac{x}{x_0})^2\right]$. 类似地, 在某些特定的共振带内, 该方程的解具有指数不稳定性$h_k \propto \exp\left(\mu_k^{(n)}x\right)$, 其中$\mu_k^{(n)}$为第$n$个Floquet指数. 第一个共振带最有效率, 出现在$A \in (1-q, 1+q)$, 且有$\mu_k^{(1)} \simeq q/2$, $q \ll 1$. 由于宇宙膨胀, 一个模式进入共振带, 经过短时间的指数增长后自动退出共振带. 因此, 该机制对引力波的放大是可控的.

由于宇宙膨胀的存在, 模式可以进入和退出共振带, 因此忽略哈勃摩擦项的简化方程(28)式可能丢失相关的物理信息. 为此, Cai等人直接对引力波的运动方程(18)式进行数值求解[55]. 暴胀期间亚哈勃视界尺度上的量子涨落表现如平面波$h_k(\tau)\cdot aM_{\rm Pl}/2\sqrt{2} = {\rm e}^{-{\rm i}c_{\rm s}k\tau}/\sqrt{2c_{\rm s}k}$, 提供原初引力波的初始条件. 选择合适的相关参数, 得到的数值结果如图11所示.

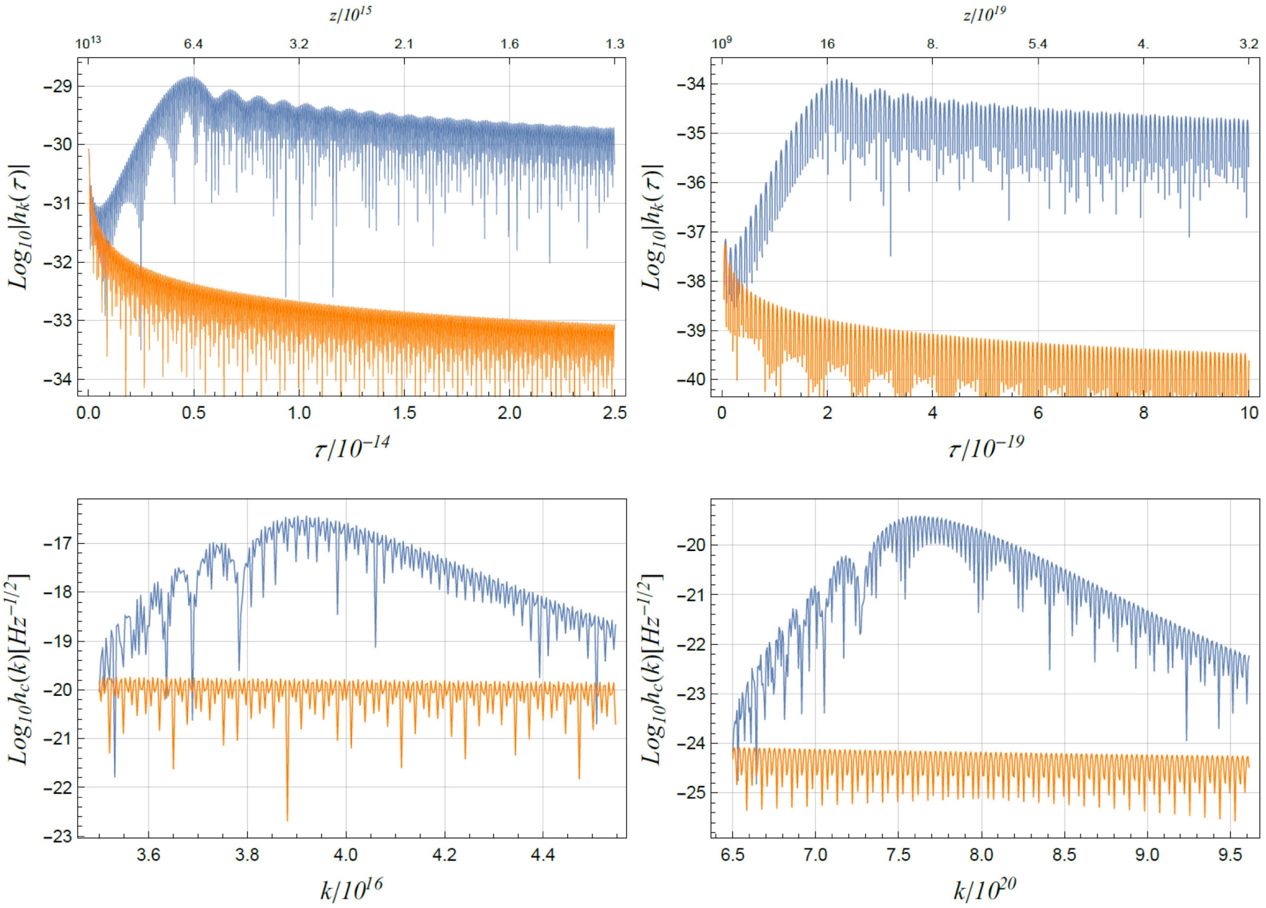


图 11　上图: 引力波$h_k(\tau)$关于共形时间τ (或关于红移z, 见顶端)的演化; 下图: 特征谱$h_{\rm c}(k)$关于k的谱形. 所有图中, 蓝色和橙色曲线分别表示发生共振((27)式中$c_{\rm g}^2$)和未发生共振($c_{\rm g}^2=1$)的数值结果. 在左图中, 取太空探测器敏感的频率$k_*=3.5\times10^{16}$和$k=3.9\times10^{16}$, 偏差参数$\alpha=0.7$, 以及特征时间$\tau_0=7.5\times10^{-15}$. 在右图中, 取地面探测器敏感的频率$k_*=6.5\times10^{20}$和$k=6.8\times10^{20}$, 以及$\alpha=0.95, \tau_0=3.7\times10^{-19}$. 该图片引用自文献[55].

Fig. 11　Upper: evolution of the gravitational wave amplitude $h_k(\tau)$ with respect to conformal time τ (or redshift z, as indicated on the top). Lower: the characteristic spectrum $h_{\rm c}(k)$ as a function of wavenumber k. In all panels, the blue and orange curves represent the numerical results for the cases with resonance ($c_{\rm g}^2$ from Eq. (27)) and without resonance ($c_{\rm g}^2=1$), respectively. In the left panel, we choose the sensitive frequencies for space-based detectors as $k_*=3.5\times10^{16}$ and $k=3.9\times10^{16}$, deviation parameter $\alpha=0.7$, and the characteristic time $\tau_0=7.5\times10^{-15}$. In the right panel, we choose the sensitive frequencies for ground-based detectors as $k_*=6.5\times10^{20}$ and $k=6.8\times10^{20}$, and $\alpha=0.95$, $\tau_0=3.7\times10^{-19}$. This figure is sourced from Ref. [55].

在图11的上图中, 我们选取了两组参数值, 展示了参数共振下随机引力波的演化结果. 可以看出, 共振持续放大随机引力波背景信号直到$\tau\sim\tau_0$. 一般情况下, 由于哈勃膨胀, 随机引力波背景的振幅随时间迅速衰减, 然而图中两个共振放大模式由于指数因子$\exp(\alpha k_*\Delta\tau/16)$, 分别获得了$10^4$和$10^5$倍的放大. 下图中, 我们展示了以上两模式演化到辐射为主时期结束时的特征谱$h_{\rm c}(f)\equiv h(k,\tau_H)/2\sqrt{f}$, 其中物理频率$f(\tau)=k/2\pi a(\tau)$. 可以看出其窄共振的特性, 共振带的宽度仅有$\Delta k\sim qk_*$. 同时, 特征谱上这两个模式的放大值与它们随时间的演化一致. 我们还可以发现, 引力波功率谱的增强与标量扰动的声速共振机制是明显不同的, 这是由于宇宙膨胀导致$c_{\rm g}^2$的振荡修正项的振幅是随时间变化

的. 以上结果显示出随机引力波的能谱表现出单个峰的特征, 其增强的振幅可以由现在和未来的地面(The Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory (LIGO)、Virgo interferometer (Virgo)、Cosmic Explorer (CE)、Einstein Telescope (ET)及The Kamioka Gravitational Wave Detector (KAGRA))和基于太空的激光干涉空间天线(Laser Interferometer Space Antenna, LISA)引力波探测达到.

Cai等[55]还选择性地对LISA、CE和ET进行了信噪比分析, 以说明该机制在探索广义相对论之外的新物理方面是可行的. 此外, 他们还说明了该机制可以被直接推广, 包括各向异性压强, 高阶耗散项以及其他可能的修改引力效应, 使得这些效应能够由引力波天文学所检验.

2.3 参数共振宇宙学: 未来已来

除了前文所述的原初黑洞和原初引力波之外, 也存在可以作为极早期宇宙物理探针的其他物理现象, 产生它们的物理过程可能是非微扰的. 在宇宙学中, 星系际尺度(~ 4 Mpc)宇宙磁场的起源仍然有待解释. 实验测得该磁场的强度在10^{-17}–10^{-14} Gs之间[106–110]. 值得注意的是, 暴胀可能为磁场起源提供了可行的框架—-在暴胀期间, 磁场的真空量子涨落被拉伸至超哈勃视界尺度并作为观测到的大尺度磁场的种子. 由于麦克斯韦理论中标准Friedamnn宇宙背景下的电磁场涨落无法得到增强, 基于规范场的共形对称性破缺的模型被提出[111–112]. 最简单的方式即引入电磁场与标量暴胀子的耦合, 例如Ratra模型引入形如$f(\phi)^2F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$的非最小耦合[113–115], 而这类被广泛考虑的模型普遍存在两个问题: 强耦合[113, 116–118], 即当有效耦合常数远大于单位值时微扰计算不再有效; 反作用[119–122], 即当暴胀期间电磁场的能量密度相比背景能量密度不可忽略时会使暴胀过早结束. 同时, 还需考虑由CMB观测限制给出的现象学限制[123–125].

在暴胀期间由共振产生原初磁场的机制中[126–127], 一般由共振导致亚哈勃视界尺度模式的指数增长作为晚期宇宙大尺度磁场的来源. 然而, 由于共振放大只在亚哈勃视界尺度发生, 磁场能量密度在共振模式退出哈勃视界后迅速衰减. 为符合观测限制, 要求亚哈勃视界尺度上的放大非常显著, 这足以使磁场能量密度在共振模式退出哈勃视界时超过暴胀的背景能量密度, 导致前述的反作用问题.

为了避免以上问题, Sasaki等[56]提出了一种新机制, 在共振机制的背景下考虑电磁场和标量暴胀子的一般函数耦合形式$f(\phi)^2F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$及引入电磁势$A_\mu$的质量项$m_A$以产生足够大的原初磁场. 模型考虑如下作用量:

$$S=\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\left[\mathcal{L}_{\rm EH}+\mathcal{L}_\phi+\mathcal{L}_{\phi A}\right] , \tag{29}$$

其中$\mathcal{L}_{\rm EH}$是Einstein-Hilbert拉格朗日密度, $\mathcal{L}_\phi$是仅包含标量的拉格朗日密度, 且有

$$\mathcal{L}_{\phi A}=f(\phi)^2\left[-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}-\frac{1}{2}m_A^2A_\mu A^\mu\right] . \tag{30}$$

Sasaki等[56]证明了振荡的$f(\phi)$和比哈勃标度小的质量m_A可以对某些电磁场模式产生共振放大, 同时不会导致强耦合和反作用问题. 以上作用量给出电磁场的运动方程如下:

$$\ddot{\mathcal{A}}+\left[\frac{k^2}{a^2}+m_A^2+\frac{1}{4}\left(\frac{\dot F}{F}\right)^2-\frac{\ddot F}{2F}\right]\mathcal{A}=0 , \tag{31}$$

其中变量$\mathcal{A}\equiv\sqrt{F}A, F\equiv af^2$, A为A_μ的傅里叶模式(忽略下标). 在dS近似下, 一个简单的模型即选取正定的F满足$F'/F=-2\gamma\sin(2z), z\equiv\omega(t-t_i)/2$, 这个选择使模函数可以取类似Whittaker-Hill方程的形式:

$$\mathcal{A}''+\left[C(z)+2q\cos(4z)+2\cos(2z)\right]\mathcal{A}=0 , \tag{32}$$

为首的参数含时. 在超哈勃视界尺度上, $k/a\to 0$, $C(z)$中的含时项可忽略. 由Floquet定理, (32)式具有指数增长的解$\mathcal{A}\propto \mathrm{e}^{\mu z}$, 即在超哈勃视界尺度上的电磁场模式获得共振放大. 由于共振导致电磁场模式的显著增强发生在视界外; 同时, 由于F为振荡函数且不需要指数增长以确保磁场得到充分增强, 前文中提到的强耦合与反作用的问题可以避免. 考虑强耦合与反作用问题以及CMB观测限制, Sasaki等人进一步讨论了对模型参数空间的限制[56].

在第1节引言中提及的早期宇宙再热图象中, 驱动暴胀的标量场ϕ在势的最低点振荡, 进而引发与其以适当形式耦合的物质场χ的参数共振, 这样的不稳定性称为预热[44–46]. 预热使暴胀场的能量有效转化为物质场的能量. 同样, 由于引力波可以在所有物质场的运动方程里产生振荡项, 人们期待引力波诱导的失稳现象可以将引力波携带的能量转移到物质场中. 利用标度因子的幂重新缩放物质场

$$y'' + c_{\rm s}^2 \mathcal{F} y' + 4\frac{c_{\rm s}^2\ k^2}{\omega^2} y + c_{\rm s}^4 \mathcal{M} y = 0\,, \tag{33}$$

其中$y = (a_y, a_z)^{\rm T}$, 角分符号表示关于$\tau \equiv \omega t/2$的导数, $\mathcal{F}$表征耗散项的大小. $\mathcal{M} \propto h_0 \cos 2\tau$提供了参数不稳定性. 由于$h_0$一般很小, 所以共振带的频率范围很窄, 即为窄共振. Brandenberger等人通过计算发现: 在真空($c_{\rm s}^2 = 1$)中, 共振仅在第二共振带产生故效率很低; 而在其间电磁场的波动速度小于光速($c_{\rm s}^2 < 1$)的介质中, 失稳现象在第一共振带即产生, 因此共振放大效率高得多. 同时他们还计算了$\Delta\omega \sim \omega$的引力波包的耗散率:

$$\ln(h_0)' \sim -G_{\rm N}\omega^2 c_{\rm s}^6 (1 - c_{\rm s}^2)^2 {\rm e}^{2\mu\tau}, \tag{34}$$

其中$G_{\rm N}$是万有引力常数. 该结果在天体物理学和宇宙学的背景下开辟了几种新的可能性和应用. 其中一个应用是嵌入在气体介质或等离子体中的天体物理事件的引力波发射. 在理想估计下, 如果介质的折射率对单位值有一阶的偏离, 引力波会在几分钟内全部衰变为电磁辐射, 因此我们将会观测到电磁信号而不是引力波信号. 另一个应用是为引力波转化为等离子体波提供了无需预先给定强背景磁场的新过程[57].

3 “台阶”暴胀模型与非高斯尾巴

原初非高斯性可能起源于暴胀时期量子场的相互作用, 即对于宇宙学扰动超越非高斯性的观测研究有望帮助我们揭示暴胀时期的物理过程. 因此, 已经有相当数量的研究尝试使用多点关联函数讨论宇宙学扰动的局域非高斯性. 这些讨论通常使用非高斯参数例如$f_{\rm NL}$基于微扰展开的方法刻画分布函数对高斯函数的偏离. 在这个部分我们将以一个具体的暴胀模型为例子讨论暴胀场的势能中一个向上的小台阶所造成的原初非高斯性, 并尝试讨论其中非微扰效应. 这个部分的内容组织如下: 在3.1节中我们遵循文献中讨论非高斯性的一般范式简单介绍非高斯性的微扰描述. 在3.2节中我们尝试使用在一个非常简单的暴胀模型中通过δN方法讨论其非高斯性. 在3.3节中我们尝试考虑这种非高斯尾巴对于原初黑洞形成的影响.

3.1 超慢滚暴胀与势能中的“台阶”

在这一部分, 我们将讨论超慢滚暴胀模型的背景动力学及其非吸引子行为, 并使用δN方法回顾超慢滚暴胀中曲率扰动$\mathcal{R}$的计算. 在此基础上, 我们将看到在暴胀势能中向上的台阶能给单场暴胀模型带来不平凡的扰动行为. 由于超慢滚暴胀模型可以在特定的尺度放大原初扰动的功率谱同时破坏Maldacena给出的单场慢滚暴胀的一致性关系[128], 在学界引起了广泛讨论和研究. 在此简单回顾一下超慢滚暴胀模型并讨论其非高斯性的起源将引导我们看到: 即使在这样简单的模型中也有超越微扰论描述的非高斯性产生. 超慢滚暴胀是指暴胀子势能在此阶段内近似为常数$V(\phi) = V_0$, 因此暴胀子场的运动方程为:

$$\frac{{\rm d}^2\phi}{{\rm d}n^2} + 3\frac{{\rm d}\phi}{{\rm d}n} = 0\,,\ 3H^2 \simeq V_0\,, \tag{35}$$

其中我们使用e叠数n作为时间变量, 其定义为${\rm d}n \equiv H{\rm d}t$. 当在$n = n_{\rm i}$时给定初始条件$\phi(n_{\rm i})$以及$\pi(n_{\rm i}) \equiv {\rm d}\phi/{\rm d}n(n_{\rm i})$, 运动方程的解为:

$$\phi(n) = \phi(n_{\rm i}) + \frac{\pi(n_{\rm i})}{3}\left[1 - {\rm e}^{-3(n-n_{\rm i})}\right]\,, \tag{36}$$

$$\pi(n) = \frac{{\rm d}\phi}{{\rm d}n_{\rm i}} = \pi(n_{\rm i}){\rm e}^{-3(n-n_{\rm i})}\,. \tag{37}$$

我们可以从中注意到, 在暴胀子的相空间(ϕ, π)中有如下关系式:

$$\pi(n) + 3\phi(n) = \pi(n_{\rm i}) + 3\phi(n_{\rm i})\,. \tag{38}$$

这意味着, 在超慢滚暴胀相结束时若$\phi(n_{\rm f}) = \phi_{\rm f}$, $\pi(n_{\rm f}) = \pi_{\rm f}$, 宇宙所经历的e-叠数$N_{\rm USR} \equiv n_{\rm f} -$

$n_{\rm i}$可以表达为初始条件$\phi_{\rm i}$和$\pi_{\rm i}$函数:

$$N_{\rm USR}(\phi_{\rm i},\pi_{\rm i};\phi_{\rm f},\pi_{\rm f}) = \frac{1}{3}\ln\left[\frac{\pi_{\rm i}}{\pi_{\rm f}}\right] = \frac{1}{3}\ln\left[\frac{\pi_{\rm i}}{\pi_{\rm i}+3(\phi_{\rm i}-\phi_{\rm f})}\right]. \tag{39}$$

利用δN方法我们可以直接得到在超慢滚暴胀相当中的曲率扰动为

$$\delta N = N(\phi_{\rm i}+\delta\phi,\pi_{\rm i}+\delta\pi) - N(\phi_{\rm i},\pi_{\rm i}) \simeq -\frac{1}{3}\ln\left(1+\frac{3\delta\phi}{\pi_{\rm f}}\right). \tag{40}$$

在上面δN的计算过程中我们略去了$\delta\pi$的项, 这是由于在超哈勃视界的尺度上$\delta\phi$近似为常量而$\delta\pi$迅速指数衰减消失. 接下来我们考察(40)式的统计性质. $\delta\phi$是德西特时空中无质量的自由标量场, 因此可以视为高斯随机场, 而曲率扰动$\mathcal{R} = \delta N(\delta\phi)$是高斯随机场的非线性函数自然而然具有了非高斯的统计性质. 一般而言, 随机场的概率分布是一个泛函, 但对于具体扰动模式其分布函数可以通过概率密度变换公式解析求解. 不难通过简单的计算而从结果中发现, 超慢滚暴胀中曲率扰动的概率分布函数具有指数形式的非高斯尾巴, 这一结果与随机暴胀中求解Fokker-Planck方程的计算结果一致[129].

在常规对于非高斯性的研究中, 研究者通常使用基于微扰展开的非高斯参数考察扰动在均值附近对非高斯性的偏离, 在本文后续内容中我们将进一步讨论这个问题. 针对超慢滚暴胀的δN结果, 在$\mathcal{R} \ll 1$时可以泰勒展开得到非高斯参数$f_{\rm NL} = 5/2$. 这一结果在更早的文献中通过In-In形式计算得到, 因其破坏了单场暴胀模型中的Maldacena一致性关系而让超慢滚暴胀模型得到了广泛的研究. 由于超慢滚暴胀不能作为宇宙暴胀的终点, 因此针对超慢滚暴胀到慢滚暴胀的相变研究对于包含有超慢滚暴胀的暴胀模型至关重要. Cai等[130]对这一相变过程进行了细致的计算, 指出该非高斯参数还取决于相变的具体过程.

此外应当注意到, 运动方程的解(37)式指出场的动能π在超慢滚暴胀相中指数衰减, 因此超慢滚暴胀有持续过久的可能性. 当初始动能不足以让暴胀子顺利通过超慢滚暴胀的势阱$|\pi_{\rm i}| < 3\Delta\phi_{\rm USR}$时就必须考虑量子涨落的影响. 在这篇综述中我们主要介绍量子涨落可以忽略不计的情况, 当量子涨落主导暴胀演化时, Vennin等[129, 131]基于随机暴胀发展了随机δN方法来计算这种情形下的扰动.

在研究超慢滚暴胀的非高斯性物理起源的过程中, Cai等[132–133]发现即使在单场慢滚暴胀中, 如果势能$V(\phi)$存在很小的向上台阶, 也可能导致高度非平凡的扰动结果. 考虑图12所示的两段慢滚暴胀势能在$\phi=\phi_{\rm c}$由一个向上的台阶所连接, 暴胀子从$\phi>\phi_{\rm c}$ (Stage-I)的区域开始演化并在$\phi_{\rm c}$处翻越这个向上的台阶, 随后进入第二段慢滚势能中开始一段向慢滚吸引子演化的弛豫过程. 在台阶的附近, 这样的势能可以被参数化为:

$$V(\phi) = \begin{cases} V_0\left[1+\sqrt{2\epsilon_{\rm I}}\,(\phi-\phi_{\rm c}) + \frac{1}{2}\eta_{\rm I}\,(\phi-\phi_{\rm c})^2\right], \\ \phi \geqslant \phi_{\rm c}, \\ (V_0+\Delta V)\left[1+\sqrt{2\epsilon_{\rm II}}\,(\phi-\phi_{\rm c}) + \right. \\ \left.\frac{1}{2}\eta_{\rm II}\,(\phi-\phi_{\rm c})^2\right], \quad \phi<\phi_{\rm c}, \end{cases} \tag{41}$$

其中ΔV是向上台阶的高度, $\epsilon_{\rm I,II}$和$\eta_{\rm I,II}$分别是Stage-I与Stage-II的慢滚势能在$\phi_{\rm c}$处的慢滚参数. 在翻越台阶的过程中暴胀子场的动能因此下降, 前后动能关系满足能量守恒:

$$\pi_{\rm d} = -\sqrt{\pi_{\rm c}^2 - 6\Delta V/V}\,. \tag{42}$$

为了后续讨论的方便, 我们引入无量纲的参数g来刻画向上台阶对暴胀子演化的影响:

$$g \equiv \frac{\pi_{\rm d}}{\pi_{\rm c}},\ (0<g<1)\,. \tag{43}$$

在这样参数化的势能中, 暴胀子的运动方程在两个暴胀阶段中都可以精确求解. 以翻越台阶后的Stage-II为例, 在求解运动方程后我们仍可如同讨论超慢滚暴胀的(38)式一样得到暴胀子在相空间中的轨迹,

$$\pi(n) + \frac{s+3}{2}\phi(n) =$$

$$\pi_{\rm d}\left[\left(1-\frac{h}{s-3}\right){\rm e}^{\frac{1}{2}(s-3)(n-n_{\rm c})}+\frac{h}{s-3}\right]+\frac{s+3}{2}\phi_{\rm c}\,, \tag{44}$$

其中我们定义了参数

$$h\equiv 6\sqrt{2\epsilon_{\rm II}}/\pi_{\rm d}\,,\ s\equiv 3\sqrt{1-4\eta_{\rm II}/3}\simeq 3-2\eta_{\rm II}\,.$$

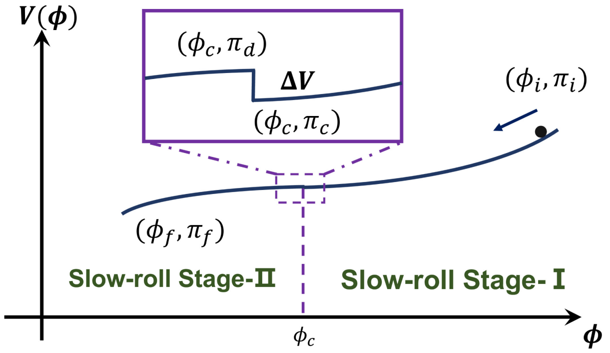


图 12 带有向上台阶的暴胀势能示意图, 在这个模型中两段慢滚暴胀势被一个陡峭的向上台阶ΔV所连接. 该图片引用自文献[132].

Fig. 12 A schematic diagram of the inflation potential with an upward step. In this model, two segments of slow-roll inflation potential are connected by a steep upward step ΔV. This figure is sourced from Ref. [132].

该轨迹刻画了慢滚暴胀动力学的吸引子性质, 即在一段弛豫时间后暴胀子在相空间中的轨迹始终会收敛于$\pi=-\sqrt{2\epsilon_{\rm II}}+\eta_{\rm II}(\phi_{\rm c}-\phi)$. 也可以从中窥见参数$h$的物理意义, 它衡量了初始场动能偏离慢滚吸引子解的程度. 当$h=-6$时, 刚好翻越台阶的暴胀子动能落在了第二阶段慢滚吸引子解上, 因此无需经历偏离慢滚条件的弛豫过程. 在接下来的计算中, 我们将看到这样的弛豫过程和向上台阶在曲率扰动上带来了不平凡的现象学结果.

由于两个慢滚阶段的背景演化过程都可以通过直接求解ϕ的运动方程得到相应解析解, 特别是原则上我们能够在给定暴胀结束状态$(\phi_{\rm f},\pi_{\rm f})$后得到宇宙的e-叠数$N_{\rm total}$对初始条件$(\phi_{\rm i},\pi_{\rm i})$的依赖关系, 因此仿照前述超慢滚暴胀的计算就可以通过δN方法得到曲率扰动. 在实际使用δN方法时, 特别需要明晰宇宙的膨胀历史对“初始条件”的依赖关系, 这里的“初始”即所计算的扰动模式因宇宙暴胀而退出哈勃视界的时刻. 在这个模型中, 曲率扰动的结果可以分为3种情况讨论:

(1) 对于长波长, 在Stage-I中暴胀子尚且离台阶很远时就已经退出哈勃视界的模式有:

$$\mathcal{R}=\delta N=-\frac{\delta\phi}{\sqrt{2\epsilon_{\rm I}}}\,. \tag{45}$$

该结果与标准的单场慢滚暴胀的预言相同, 保证了这个模型在选择适当的$\epsilon_{\rm I}$时将给出符合CMB和LSS观测的结果.

(2) 对于在Stage-I中暴胀子即将遇到台阶时$(n(\phi_{\rm c})-n(\phi)<1)$出视界的模式,

$$\mathcal{R}\simeq-\frac{1}{3}\ln\left[1+\frac{3\delta\phi}{\pi_{\rm c}}\right]+\frac{1}{\eta_{\rm II}}\ln\left[1+\frac{2\eta_{\rm II}\delta\pi_{\rm d}}{6\sqrt{2\epsilon_{\rm II}}+2\eta_{\rm II}\pi_{\rm d}}\right], \tag{46}$$

其中$\delta\pi_{\rm d}$是关于$\delta\phi$的非线性函数:

$$\delta\pi_{\rm d}=\pi_{\rm d}\left[\sqrt{1+\frac{6}{g}\frac{\delta\phi}{\pi_{\rm d}}+9\left(\frac{\delta\phi}{\pi_{\rm d}}\right)^2}-1\right]. \tag{47}$$

这里我们注意到(46)式当中的第一项与超慢滚暴胀中的(40)式一致, 我们将在稍后解释其背后的物理原因.

(3) 对于在Stage-II中出视界的模式计算结果与慢滚暴胀一致,

$$\mathcal{R}=\delta N=-\frac{\delta\phi}{\sqrt{2\epsilon_{\rm II}}}\,. \tag{48}$$

上面的结果告诉我们势能中向上的台阶导致在其之前很近的范围内出视界的模式行为偏离了慢滚暴胀的预言, 并且与超慢滚暴胀结果有相似之处. 为了理解这些结果的合理性及其背后的物理起源, 我们不妨在相空间中检查ϕ的演化行为.

计算这个模型的δN结果时我们锚定暴胀在Stage-II的慢滚相$(\phi_{\rm f},\pi_{\rm f})$中结束, 对于在Stage-I中出视界的模式它们所经历的宇宙膨胀历史由两部分贡献, 分别来自于台阶前后两个阶段$N_{\rm total}=N_{\rm I}+N_{\rm II}$. 暴胀子翻越台阶之后的场动能未必恰好落在慢滚吸引子上, 可能需要经历一段弛豫过程, $N_{\rm II}$因此会依赖于ϕ刚爬上台阶之后的动能$\pi_{\rm d}$. 而$N_{\rm I}$的贡献需要更加小心讨论: 如果模式出视界以后ϕ

经历了足够长的演化才到达台阶处(比如数个e-叠数), 则由于慢滚暴胀的吸引子性质, 在ϕ到达台阶时的场动能已经为$-\sqrt{2\epsilon_{\rm I}}$. 此时在计算$\delta N = N_{\rm total}(\phi_{\rm i}+\delta\phi, \pi_{\rm i}+\delta\pi) - N_{\rm total}(\phi_{\rm i}, \pi_{\rm i})$时$N_{\rm II}$没有贡献, $N_{\rm I}$可以使用慢滚近似. 但若我们考察那些在Stage-I中非常接近台阶的区域出视界的模式, 此时对于没有落在慢滚吸引子上的初值$(\phi_{\rm i}, \pi_{\rm i})$并没有足够的弛豫时间使得$\pi_{\rm c} = -\sqrt{2\epsilon_{\rm I}}$, 因此不仅在$N_{\rm II}$中的$\pi_{\rm d}$是初值的函数, 同时还必须考虑$N_{\rm I}$偏离慢滚吸引子的弛豫行为. 在这种情形中, 通过完整求解在Stage-I中的运动方程可以证明来自$N_{\rm I}$的贡献与超慢滚暴胀中的结果一致[132].

图13通过相空间中的轨迹展示了图12所示模型暴胀子的动力学, 红色虚线为慢滚吸引子. 在仅考虑背景演化时, 无扰动的宇宙沿粗蓝实线演化. 在$\phi = \phi_{\rm c}$处的不连续性来自能量守恒条件(42)式. 从独立宇宙的角度来看, 宇宙学扰动对应暴胀宇宙中不同哈勃区域经历了不一样的暴胀过程, 即在δN方法中初始条件的扰动. 在宇宙仅经历慢滚暴胀时, 这些具有不同的初始条件的哈勃区域在一段时间的演化后会很快收敛到慢滚吸引子上. 图中浅蓝色的轨迹就演示了扰动的情况, 不妨把这些轨迹称为"离吸引子轨迹". 在台阶前很近的区域内出视界的扰动尚未收敛到吸引子上便被冻结, 影响了后续的演化过程. 这些"离吸引子轨迹"的存在在之前的很多研究中被忽视了, 但在具有向上台阶的模型中这些轨迹可能会导致完全不同的演化过程. 这个观点可以一定程度上帮助我们理解(46)式中非线性的物理起源.

3.2 再谈非高斯: 微扰展开和非高斯尾巴

上面的讨论中我们已经在超慢滚暴胀、具有向上台阶的分段慢滚暴胀两个模型中得到了曲率扰动$\mathcal{R}$的结果, 在这个部分中我们将尝试对原初扰动的非高斯性进行进一步讨论. 在宇宙学中曲率扰动$\mathcal{R}(\mathbf{x})$是一个随机场, 但在这里我们主要讨论局域的统计性质, 即在空间中某一点处的值, 因此仅视其为一个随机变量.

当我们在谈论一个随机变量是高斯随机变量$\mathcal{R}_{\rm G}$时, 只需要两个参数即可完全刻画其随机行为的统计性质, 即一阶矩$\langle\mathcal{R}_{\rm G}\rangle = \mu$(均值)和二阶矩$\langle(\mathcal{R}_{\rm G}-\mu)^2\rangle = \sigma^2$(方差), 此时其概率密度函数可被确定为:

$$P(\mathcal{R}_{\rm G}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left[-\frac{(\mathcal{R}_{\rm G}-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]. \tag{49}$$

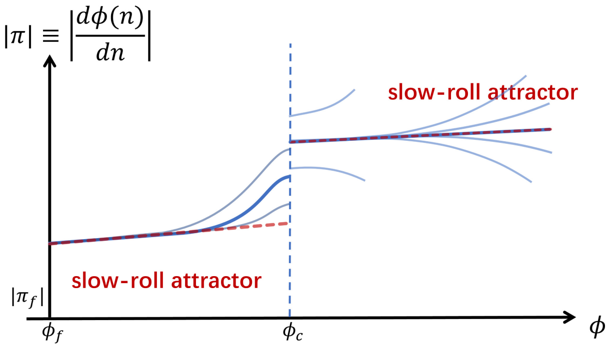


图 13 向上台阶模型中暴胀子的相空间$(\phi, |\pi|)$. 红色虚线是慢滚吸引子的轨迹. 蓝色粗实线是给定满足慢滚条件的初始条件以后的暴胀子演化轨迹, 淡蓝色细实线代表了不同场速度下那些"离吸引子轨迹". 这些"离吸引子轨迹"是这个模型给出非平凡扰动结果的关键. 该图片引用自文献[132].

Fig. 13 The phase space $(\phi, |\pi|)$ of the inflaton in the upward step model. The red dashed line represents the trajectory of the slow-roll attractor. The blue thick solid line represents the evolution trajectory of the inflaton starting from initial conditions that satisfy the slow-roll conditions. The light blue thin solid lines represent trajectories with different field velocities, which are "off-attractor" trajectories in the model that give rise to non-trivial perturbation results. These "off-attractor" trajectories play a crucial role in generating non-trivial perturbations in this model. This figure is sourced from Ref. [132].

而想要刻画非高斯的随机变量则要更加困难一些, 原则上概率分布函数在满足一定数学要求的前提下总可以以任意的形式偏离高斯函数. 在宇宙学中, 可以认为一系列的物理过程导致曲率扰动是一个高斯扰动的函数:

$$\mathcal{R} = f(\mathcal{R}_{\rm G}). \tag{50}$$

这个函数f原则上是一个任意函数, 只需要保证$f(0) = 0$成立. 另外如果我们认为在$\mathcal{R}_{\rm G}\to 0$的极限下$\mathcal{R}$与$\mathcal{R}_{\rm G}$近似有线性关系, 那么在这一极限下我们总可以重新标度高斯变量$\mathcal{R}_{\rm G}$使得$f'(0) = 1$.

因此在均值附近, 我们可以尝试对随机变量使用泰勒展开$|\mathcal{R}_{\rm G}|\ll 1$,

$$\mathcal{R}(\boldsymbol{x})=\mathcal{R}_{\rm G}(\boldsymbol{x})+\frac{1}{2}f''(0)\Big[\mathcal{R}_{\rm G}(\boldsymbol{x})^2-2\sigma^2\Big]+\frac{1}{3!}f'''(0)\mathcal{R}_{\rm G}(\boldsymbol{x})^3+\cdots. \tag{51}$$

我们所熟悉的非高斯参数即由此展开所给出, $f_{\rm NL}\equiv 5f''(0)/6$, $g_{\rm NL}\equiv 25f'''(0)/54$. 这一展开在$|\mathcal{R}_{\rm G}|\ll 1$的区域内可以较好地描述曲率扰动对高斯扰动的偏离, 也常用于讨论宇宙学中非高斯扰动的影响.

在前述的超慢滚模型中, 将结果(40)式进行幂级数展开并与(51)式比对就可以得到其$f_{\rm NL}=5/2$. 而对于台阶暴胀模型中的结果(46)式, 我们也可以使用同样的方法直接计算得到非高斯参数在$g\ll 1$时有$f_{\rm NL}=5|h|/12$. 但是我们需要时刻注意使用非高斯参数$f_{\rm NL}$、$g_{\rm NL}$等来刻画其对高斯分布的偏离是基于幂级数展开的微扰论方法仅适用于$|\mathcal{R}_{\rm G}|\ll 1$的范围. 当需要考察较大的$|\mathcal{R}|$时, (51)式可能已经失效, 我们需要完整的$f(\mathcal{R}_{\rm G})$来描述体现在$P(\mathcal{R})$中的非微扰特征.

在数学上, 对于具有良好性质的f可以利用关系$P(\mathcal{R}_{\rm G}){\rm d}\mathcal{R}_{\rm G}=P(\mathcal{R}){\rm d}\mathcal{R}$得到完整的$P(\mathcal{R})$表达式. 但是在实践中想要得到解析的$P(\mathcal{R})$结果困难重重, 因为需要求得$\mathcal{R}_{\rm G}=f^{-1}(\mathcal{R})$的具体表达式及其导数. 超慢滚暴胀的结果(40)式就是一个可以通过上述方法得到完整的曲率扰动分布函数的例子, 与高斯分布不同的是超慢滚暴胀给出的$P(\mathcal{R})$具有${\rm e}^{-3\mathcal{R}}$形式的非高斯尾巴. 由于高斯分布函数的尾巴以${\rm e}^{-\mathcal{R}^2}$的形式衰减, 因此相较于慢滚暴胀给出的高斯分布, 超慢滚暴胀更加容易产生较大曲率扰动. 这种分布函数尾巴处行为的本质区别会严重影响原初黑洞的形成. 在具有向上台阶的模型中也能够在合理的近似下得到非高斯分布的具体形式, 我们将看到它在尾巴处展现了更加奇特的行为并且同时非高斯参数$f_{\rm NL}$可以很小. 当向上台阶的影响很显著时, 我们可以认为在$g^2|h|\ll 1$的参数范围内来自(46)式中曲率扰动的主要贡献来自于第二项. 于是我们可以近似得到下面的关系:

$$\mathcal{R}\simeq-\frac{2}{|h|}\left[\sqrt{1-|h|\mathcal{R}_{\rm G}}-1\right], \tag{52}$$

其中$\mathcal{R}_{\rm G}=6\,\delta\phi/(gh\pi_{\rm d})$正比于暴胀场扰动$\delta\phi$, 因此可以认为是曲率扰动在微扰区域$|\mathcal{R}|\ll 1$内的高斯部分. 我们很快注意到, (52)式的结果给出了一个最大的曲率扰动值, 即$\mathcal{R}=2/|h|$. 这是一个完全非微扰的行为, 物理上可以理解为当扰动过大, 这个区域的动能将不足以翻过这个向上的台阶. 利用(52)式和(49)式我们可以求解得到$P(\mathcal{R})$的具体形式,

$$P(\mathcal{R})=\frac{2-|h|\mathcal{R}}{\Omega}\exp\left[-\frac{\mathcal{R}^2(4-|h|\mathcal{R})^2}{32\sigma_{\mathcal{R}}^2}\right];\quad \mathcal{R}\leqslant\frac{2}{|h|}, \tag{53}$$

其中Ω是一个归一化系数. 图14展示了不同h取值下(53)式与高斯分布的对比. 图中蓝色线为高斯分布, 红色与黑色线为(53)式所给出的非高斯分布. 这个分布在尾巴处有截断$2/|h|$, 这导致对高斯分布的严重偏离, 同时其非高斯参数为$f_{\rm NL}=5|h|/12$. 通过选择合适的h, 就可以在$f_{\rm NL}$很小时$P(\mathcal{R})$仍然具有相当显著的非高斯行为. 对于红色线的情况, 非高斯的分布函数在$\mathcal{R}\geqslant 0.5$的区域内比高斯函数大数个量级, 因此也会对原初黑洞形成产生很大的影响, 我们将在下节估计这个影响.

3.3 非高斯尾巴与原初黑洞

非高斯尾巴的一大理论动机和应用就是影响原初黑洞的形成. 原初黑洞的形成理论认为当暴胀结束之后重新进入视界的密度反差$\delta(r)$大于某个临界值时便会形成原初黑洞, $\beta_{\rm PBH}=\int_{\delta_{\rm c}}^{\infty}{\rm d}\delta P(\delta)$. 基于这个机制, 原初黑洞的丰度将极度依赖密度反差的概率分布函数在大于这个临界值$\delta_{\rm c}$时的行为. 在前述讨论中δN方法能够非微扰地描述曲率扰动的非高斯尾巴, 我们希望可以基于此估计非高斯尾巴对原初黑洞丰度的影响.

首先我们需要计算曲率扰动的功率谱$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k)$. 本文主要讨论的台阶暴胀模型给出了在小尺度上放大的功率谱, 其功率谱在小尺度上的放大幅度与向上台阶有关[132], 即$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k)\propto g^{-2}$. 向上台阶暴胀

给出了与Starobinsky线性模型[134]、超慢滚暴胀、向下台阶暴胀这类模型高度类似的功率谱行为, 在适当选取g和势能慢滚参数时小尺度上功率谱的振幅即使在高斯情形下也可以产生原初黑洞.

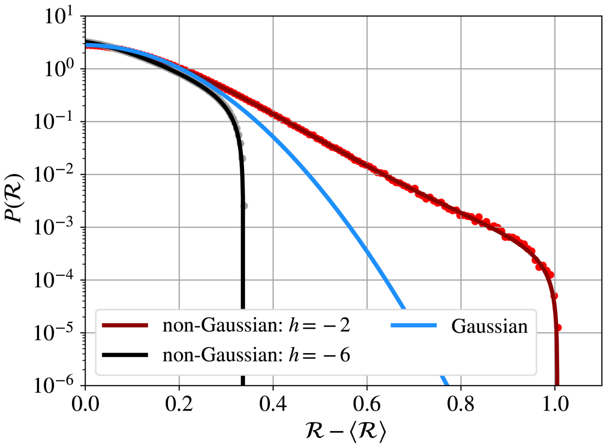


图 14 在台阶暴胀模型中在靠近台阶区域内出视界的扰动的分布函数(53)式与高斯分布的比较, 我们选取了$\sigma = 0.02$. 其中黑色数据点和红色数据点是基于(46)式的蒙特卡洛数值结果. 图片引用自文献[133].

Fig. 14 Comparison between the distribution function Eq. (53) of perturbations that exit the horizon near the step region in the step inflation model and the Gaussian distribution, with $\sigma = 0.02$. The black and red data points are based on Monte Carlo numerical results from Eq. (46). The figure is sourced from Ref. [133].

但需要注意原则上在大于哈勃视界的尺度上我们总可以通过坐标变换改变曲率扰动的值, 因此在严格考虑原初黑洞的形成时曲率扰动$\mathcal{R}$并非真正具有物理意义的量. 在超哈勃视界尺度上, 密度反差与不含时的曲率扰动具有如下关系[135]:

$$\delta(r) = -\frac{8}{9}\left(\frac{1}{aH}\right)^2 \mathrm{e}^{-5\mathcal{R}(r)/2}\nabla^2\mathrm{e}^{\mathcal{R}(r)/2}\,, \tag{54}$$

即与曲率扰动的空间导数有关. 为了简洁明了地估算向上台阶暴胀中非高斯尾巴对原初黑洞丰度的影响, 不妨在k空间中考虑一个简单情形: 当功率谱在小尺度k_{p}上有峰, 密度反差大致为$\delta \sim k_{\mathrm{p}}^2\mathcal{R}/(aH)^2$. 当暴胀结束后扰动进入视界时有$k = aH$, 因此$\delta \sim \mathcal{R}$. 即在傅里叶空间中, 当扰动模式重新进入视界开始坍缩时原初黑洞的丰度可以估算为$\beta_{\mathrm{PBH}} = \int_{\mathcal{R}_{\mathrm{c}}}^{\infty} \mathrm{d}\mathcal{R}P[\mathcal{R}]$, 这里$\mathcal{R}_{\mathrm{c}} \sim \mathcal{O}(1)$.

在上述讨论中, 对分布函数结果(53)式积分即可以得到非高斯情况下原初黑洞丰度:

$$\beta_{\mathrm{PBH}}^{\mathrm{NG}} = \frac{\sqrt{2\pi\sigma_{\mathcal{R}}^2}}{\Omega}\left[\mathrm{Erf}\left(\frac{1}{|h|\sqrt{2\sigma_{\mathcal{R}}^2}}\right) - \mathrm{Erf}\left(\frac{\mathcal{R}_{\mathrm{c}}\left(4-|h|\mathcal{R}_{\mathrm{c}}\right)}{4\sqrt{2\sigma_{\mathcal{R}}^2}}\right)\right], \tag{55}$$

其中, $\mathrm{Erf}(x)$为误差函数. 当坍缩所需阈值$\mathcal{R}_{\mathrm{c}}$大于截断$2/|h|$时, 则将不会有扰动可以坍缩产生原初黑洞. 与高斯扰动的情形

$$\beta_{\mathrm{PBH}}^{\mathrm{G}} = \left[1 - \mathrm{Erf}\left(\mathcal{R}_{\mathrm{c}}/\sqrt{2\sigma_{\mathcal{R}}^2}\right)\right]/2$$

比较, 我们可以发现对于确定的坍缩阈值$\mathcal{R}_{\mathrm{c}}$, 参数h将会对原初黑洞的丰度有巨大的影响.

如图14中黑色曲线所示, 当$|h|$取值较大时$P(\mathcal{R})$被快速压低. 甚至在$\mathcal{R}_{\mathrm{c}} > 2/|h|$时该模型无法产生可以坍缩形成原初黑洞的扰动, 与此同时$f_{\mathrm{NL}} = 5|h|/12$可以有较大取值. 反之如果$|h|$取值较小, 如图14中红色曲线, 在$\mathcal{R}_{\mathrm{c}} < \mathcal{R} < 2/|h|$区间内非高斯尾巴将会远远大于高斯函数, 这将极大促进原初黑洞的形成. 当坍缩阈值$\mathcal{R}_{\mathrm{c}} = 0.7$时, $h = -2$将会给出$\beta_{\mathrm{PBH}}^{\mathrm{NG}}/\beta_{\mathrm{PBH}}^{\mathrm{G}} \sim 10^3$.

这里使用曲率扰动的非高斯尾巴计算原初黑洞的丰度仅仅是对这一非微扰效应的粗糙估计. 严格的计算仍然依赖使用(54)式所给出的密度反差及其概率分布函数. 对于超慢滚暴胀模型给出的结果(40)式, 密度反差的概率分布函数$P(\delta)$可以被解析给出[40, 136–137]. 在超慢滚暴胀中基于$P(\delta)$所得到的原初黑洞丰度$\beta_{\mathrm{PBH}}^{\mathrm{NG}}$与使用$P(\mathcal{R})$估计的结果相比甚至更大. 这些结果都表明在尝试计算原初黑洞的丰度时, 使用f_{NL}等基于微扰展开的非高斯参数对非高斯的影响进行刻画是不可靠的. 在考虑了非高斯尾巴的影响以后产生同等丰度的原初黑洞所需要的功率谱振幅将会远远小于高斯的情形.

非常有趣的是, 除了上述所讨论的非高斯尾巴对原初黑洞的增丰在向上台阶暴胀模型中还有一种可能会形成原初黑洞的机制, 即暴胀子的“卡陷”[38]. 当暴胀演化到台阶$\phi = \phi_{\mathrm{c}}$处, 宇宙的一些区域因为扰动而没有足够的场速度, 即$|\pi_{\mathrm{c}}| < 6\Delta V/V$

越过台阶时, 这个区域中的暴胀子将会陷在台阶的底部. 而周围的区域成功翻越了台阶以后, 卡陷在台阶底部的区域由于具有更低的势能将会成为一个被假真空裹住的真真空气泡. 在真真空气泡形成的一段时间内, 这个区域会以指数膨胀[138–139], 直到周围的假真空沿着第二段慢滚暴胀势能演化到更低的势能. 当外围区域的势能更低时, 真假真空的角色就会反转. 此时泡泡开始被周围势能更低的真真空挤压坍缩形成一个黑洞. 但神奇的是此时气泡内部时空的几何其实仍然在维持指数膨胀[138–139]. 这导致了一个时空中类似虫洞的结构, 连接着两个因果无关的宇宙[140–141]. 这个机制导致的原初黑洞丰度和质量都高度依赖具体的模型实现机制, Cai等人的工作中对质量和丰度给出了粗略的估计值[132].

4 总结与展望

本文使用参数共振和非高斯尾巴两类现象学模型作为例子, 综述了近年来宇宙学扰动理论在小尺度上对超越微扰论的一些现象学研究. 第一类模型, 即共振的原初扰动模型, 基于参数共振方程解的Floquet不稳定性非微扰地放大特定物理量. 参数共振机制通过在扰动量的运动方程中引入周期性变化的参数, 进而构造出Mathieu方程或其它解具有Floquet不稳定性的参数共振方程. 如(1)式所示, 在声速共振机制中, 引入的周期变化参数是扰动的声速平方c_s^2. 在这种情况下曲率扰动的运动方程可以被改写为标准的Mathieu方程. 在特定的窄参数区间内曲率扰动的功率谱可以被放大到$P_{\mathcal{R}} \sim 10^{-2}$量级, 产生原初黑洞. 不同于修改暴胀子势能放大功率谱的模型, 声速共振机制无须修改暴胀子背景的运动方程, 避免了对暴胀势能的精细构造和调整. 同时由于Mathieu方程的窄共振特性, 只有在特征尺度对应波数k_*及其整数倍很窄波数范围内的扰动模式被放大, 共振带之外的模式不受影响, 其功率谱能够在保证大尺度符合CMB和LSS观测的同时在小尺度上有非常尖锐的峰. 这是第一个可以自然产生单色质量函数原初黑洞的简单模型, 为单一质量原初黑洞的产生提供具体例子的同时也为日后声速共振机制的检验提供了清晰判据. 基于这个例子作者团队进一步在暴胀子-曲率子混合暴胀模型[68]、双场暴胀模型[69]中实现了参数共振放大原初曲率扰动功率谱. 同时, Chen等人在DBI暴胀模型中成功构造了一个声速共振的实现模型[65], 该模型证明在DBI这种非正则场暴胀模型中确实可以实现声速共振机制. 在双场暴胀中, 共振机制可以单独控制二阶张量模式的扰动, 实现在CMB尺度单独放大张量扰动而保持标量扰动的功率谱符合CMB观测. 这一特性破坏了Lyth界限, 可以在小场暴胀模型中产生较大的原初引力波, 有望在未来CMB的B偏振模式观测实验中得到检验[54]. 在这类声速共振模型中, 放大的标量扰动会诱导产生引力波. 区别于传统的标量诱导引力波模型, 声速共振机制在暴胀时期视界内产生的引力波往往不可忽略, 与辐射为主时期扰动重新进入视界后产生的诱导引力波叠加产生双峰的引力波能谱信号. 在未来的引力波观测试验中可以利用这一特点对声速共振机制进行检验和参数的限制. 除了放大原初的标量扰动模式, 当引力波的波速平方也具有特殊的周期变化形式时, 声速共振机制也可以放大在宇宙早期产生的引力波信号[55]. 利用这一特点, 该机制可以用于检验宇宙早期的引力理论中的引力波波速.

Sasaki和Brandenberger等宇宙学家进一步推广了参数共振模型, 将其应用到了电磁场与暴胀子场[56]、引力场与电磁场相互作用[57]的运动方程中. 参数共振的Floquet不稳定性可以使参与共振的模式非微扰地放大, 因此可以用于解释原初磁场起源或放大引力子-引力子相互作用产生光子的振幅.

在第二个例子非高斯尾巴的讨论中, 我们通过讨论单场暴胀中暴胀子势能有一个向上台阶的模型, 展示了其原初扰动的非高斯性具有非平凡的特性. 在这个玩具模型中, 通过δN形式的计算我们展示了在暴胀子遇到向上台阶之前的一段时间内, 退出视界的扰动由于受到台阶势能的影响在功率谱放大的同时产生了非高斯尾巴. 这种非高斯尾巴体现了在这种情形下扰动的非高斯性具有典型的非微扰特征, 即在非高斯参数$f_{\rm NL}$很小的同时却具有很强的非高斯性. 我们进一步阐释了这种非微扰的非高斯性起源: 在向上的台阶附近暴胀子场的

扰动会改变背景的演化结果, 在场扰动较大的情况下这个区域的背景时空将卡陷在势能台阶的底部无法继续演化, 卡陷的区域也会在一段时间后塌缩成为原初黑洞. 在对这个简单例子的计算中我们得到了完整的曲率扰动对场扰动的非线性依赖关系$\mathcal{R} = \delta N(\delta\phi)$, 并讨论了其微扰展开失效的条件. 我们指出, 非高斯尾巴具有非微扰的非高斯性可以通过δN形式的计算或者通过求解随机暴胀的Fokker-Planck方程来研究. 同时, 非高斯尾巴对于原初黑洞丰度的计算具有非常显著的影响, 在讨论非吸引子模型中原初黑洞的形成时我们应该考虑完整非高斯性的影响, 并通过正确的判据计算原初黑洞的形成.

本文所着重讨论的两种描述非微扰过程的现象学模型, 对研究和观测搜寻原初黑洞和原初时期产生的引力波提供了新的可能性. 由于搜寻原初黑洞和相关引力波信号对研究小尺度的极早期宇宙具有重要意义, 目前已经有大量的研究通过已有的多波段、多信使天文观测包括CMB物理、引力透镜、宇宙射线、引力波直接或间接观测等手段对原初黑洞的质量分布和初始丰度进行了详细的限制[23, 27, 142–149]. 特别是基于脉冲星计时阵列的纳赫兹引力波观测, 掀起了讨论非高斯性对原初黑洞形成影响的热潮[53, 150]. 这些观测使我们意识到, 在研究原初宇宙中较小尺度的物理过程时非线性效应和非微扰的现象很可能扮演了极为重要的角色.

目前, 对于宇宙学中在较小尺度非线性效应和非微扰现象的理论研究仍困难重重, 大量悬而未决的问题亟待解决. 例如, 声速共振机制的物理实现目前还不够清楚, 我们希望找到更加自然和具有鲁棒性的方法来实现声速平方的周期性变化. 目前对在暴胀时期声速共振效应的非高斯性的计算仍比较粗糙, 我们希望有更加严格和精细的结果可以求出这类模型的非高斯性. 我们对可以产生非高斯尾巴的模型了解还不够全面, 我们希望可以找到更多的具有非高斯尾巴的暴胀模型, 进而对非高斯尾巴的性质有更全面的认识. 我们还希望找到更强大的方法可以求解曲率扰动的概率分布函数进而系统性地研究其非高斯特征. 总而言之, 对超越微扰论和非线性的宇宙学现象研究已经成为了未来宇宙学研究的一个热点, 越来越多的工作正在揭开这片神秘领域的面纱. 在这个领域里, 我们相信仍然有非常丰硕的果实等待我们去采摘.

致谢 在本文的写作过程中, 作者与陈超、江捷、王东刚、王博、鄢盛丰等进行了丰富讨论, 在此特别感谢他们的帮助和指导.

参 考 文 献

[1] Linde A D. RPPh, 1984, 47: 925
[2] Kofman L A, Linde A D. NuPhB, 1987, 282: 555
[3] Linde A D. Particle Physics and Inflationary Cosmology, 1990: 5
[4] Lidsey J E, Liddle A R, Kolb E W, et al. RvMP, 1997, 69: 373
[5] Mukhanov V F, Feldman H A, Brandenberger R H. PhR, 1992, 215: 203
[6] Aghanim N, Akrami Y, AshdownM, et al. A&A, 2020, 641: A6
[7] Akrami Y, Argüeso F, Ashdown M, et al. A&A, 2020, 641: A10
[8] Brandenberger R H, Mukhanov V F, Sornborger A. RhRvD, 1993, 48: 1629
[9] Brandenberger R. RhRvD, 2009, 80: 043516
[10] Cai Y F, Chen S H, Dent J B, et al. CQGra, 2011, 28: 215011
[11] Steinhardt P J, Turok N, Turok N. Science, 2002, 296: 1436
[12] Steinhardt P J, Turok N. RhRvD, 2002, 65: 126003
[13] Novello M, Bergliaffa S E P. PhR, 2008, 463: 127
[14] Ellis G F R, Maartens R. CQGra, 2004, 21: 223
[15] Ellis G F R, Murugan J, Tsagas C G. CQGra, 2004, 21: 233
[16] Hawking S. MNRAS, 1971, 152: 75
[17] Carr B J, Hawking S W. MNRAS, 1974, 168: 399
[18] Carr B J. ApJ, 1975, 201: 1
[19] Chapline G F. Nature, 1975, 253: 251
[20] Carr B, Kuhnel F, Sandstad M. RhRvD, 2016, 94: 083504
[21] García-Bellido J. JPhCS, 2017, 840: 012032
[22] Carr B, Kuhnel F. ARNPS, 2020, 70: 355
[23] Carr B, Kohri K, Sendouda Y, et al. RPPh, 2021, 84: 116902
[24] Green A M, Kavanagh B J. JPhG, 2021, 48: 043001
[25] Carr B, Kuhnel F. ScPPL, 2022, 48: 1
[26] Abbott B P, Abbott T D, Abbott M, Ret al. PhRvX, 2016, 6: 041015
[27] Sasaki M, Suyama T, Tanaka T, et al. CQGra, 2018, 35: 063001

[28] Khlopov M Y, Rubin S G, Sakharov A S. APh, 2005, 23: 265
[29] Duechting N. RhRvD, 2004, 70: 064015
[30] Kawasaki M, Kusenko A, Yanagida T T. PhLB, 2012, 711: 1
[31] Kohri K, Nakama T, Suyama T. RhRvD, 2014, 90: 083514
[32] Clesse S, García-Bellido J. RhRvD, 2015, 92: 023524
[33] Tsamis N C, Woodard R P. RhRvD, 2004, 69: 084005
[34] Kinney W H. RhRvD, 2005, 72: 023515
[35] Chen X, Firouzjahi H, Komatsu E, et al. JCAP, 2013, 12: 039
[36] Motohashi H, Starobinsky A A, Yokoyama J. JCAP, 2015, 09: 018
[37] Franciolini G, Kehagias A, Matarrese S, et al. JCAP, 2018, 03: 016
[38] Inomata K, McDonough E, Hu W. JCAP, 2022, 02: 031
[39] Zheng R, Shi J, Qiu T. ChPhC, 2022, 46: 045103
[40] Biagetti M, De Luca V, Franciolini G, et al. PhLB, 2021, 820: 136602
[41] Ballesteros G, Céspedes S, Santoni L. JHEP, 2022, 01: 074
[42] Gorji M A, Motohashi H, Mukohyama S. JCAP, 2022, 02: 030
[43] Qiu T, Wang W, Zheng R. RhRvD, 2023, 107: 083018
[44] Kofman L, Linde A D, Starobinsky A A. PhRvL, 1994, 73: 3195
[45] Shtanov Y, Traschen J H, Brandenberger R H. RhRvD, 1995, 51: 5438
[46] Kofman L, Linde A D, Starobinsky A A. RhRvD, 1997, 56: 3258
[47] Bassett B A, Tsujikawa S, Wands D. RvMP, 2006, 78: 537
[48] Allahverdi R, Brandenberger R, Cyr-Racine F Y, et al. ARNPS, 2010, 60: 27
[49] Amin M A, Hertzberg M P, Kaiser D I, et al. IJMPD, 2014, 24: 1530003
[50] Cai Y F, Tong X, Wang D G, et al. PhRvL, 2018, 121: 081306
[51] Agazie G, Anumarlapudi A, Archibald A Z, et al. ApJ, 2024, 951: L8
[52] Afzal A, Agazie G, Anumarlapudi A, et al. ApJ, 2023, 951: L11
[53] Cai Y F, He X C, Ma X H, et al. SciBu, 2023, 68: 2929
[54] Cai Y F, Jiang J, Sasaki M, et al. PhRvL, 2021, 127: 251301
[55] Cai Y F, Lin C, Wang B, et al. PhRvL, 2021, 126: 071303
[56] Sasaki M, Vardanyan V, Yingcharoenrat V. RhRvD, 2023, 107: 083517
[57] Brandenberger R, Delgado P C M, Ganz A, et al. PDU, 2023, 40: 101202
[58] Armendariz-Picon C, Damour T, Mukhanov V F. PhLB, 1999, 458: 209
[59] Garriga J, Mukhanov V F. PhLB, 1999, 458: 219
[60] Starobinsky A A. PhLB, 1980, 91: 99
[61] Bringmann T, Scott P, Akrami Y. RhRvD, 2012, 85: 125027
[62] Ade P A R, et al. A&A, 2016, 594: A20
[63] Silverstein E, Tong D. RhRvD, 2004, 70: 103505
[64] Alishahiha M, Silverstein E, Tong D. RhRvD, 2004, 70: 123505
[65] Chen C, Ma X H, Cai Y F. RhRvD, 2020, 102: 063526
[66] Klebanov I R, Strassler M J. JHEP, 2000, 8: 052
[67] Sato-Polito G, Kovetz E D, Kamionkowski M. RhRvD, 2019, 100: 063521
[68] Chen C, Cai Y F. JCAP, 2019, 10: 068
[69] Zhou Z, Jiang J, Cai Y F, et al. RhRvD, 2020, 102: 103527
[70] Langlois D, Vernizzi F. RhRvD, 2004, 70: 063522
[71] Ferrer F, Rasanen S, Valiviita J. JCAP, 2004, 10: 010
[72] Langlois D, Vernizzi F, Wands D. JCAP, 2008, 12: 004
[73] Cai Y F, Xia H Y. PhLB, 2009, 677: 226
[74] Fonseca J, Wands D. JCAP, 2012, 06: 028
[75] Byrnes C T, Cortês M, Liddle A R. RhRvD, 2014, 90: 023523
[76] Jiang J, Liang Q, Cai Y F, et al. ApJ, 2019, 876: 136
[77] Lyth D H, Ungarelli C, Wands D. RhRvD, 2003, 67: 023503
[78] Sasaki M, Valiviita J, Wands D. RhRvD, 2006, 74: 103003
[79] Enqvist K, Sloth M S. NuPhB, 2002, 626: 395
[80] Enqvist K, Kurki-Suonio H, Valiviita J. RhRvD, 2000, 62: 103003
[81] Saito R, Yokoyama J. PhRvL, 2009, 102: 161101
[82] Saito R, Yokoyama J. PThPh, 2010, 123: 867
[83] Cai R G, Pi S, Sasaki M. PhRvL, 2019, 122: 201101
[84] Kohri K, Terada T. RhRvD, 2018, 97: 123532
[85] Wang B, Zhang Y. RhRvD, 2018, 98: 123019
[86] Cai Y F, Chen C, Tong X, et al. RhRvD, 2019, 100: 043518
[87] Ananda K N, Clarkson C, Wands D. RhRvD, 2007, 75: 123518
[88] Baumann D, Steinhardt P J, Takahashi K, et al. RhRvD, 2007, 76: 084019
[89] Lyth D H. PhRvL, 1997, 78: 1861
[90] Copeland E J, Liddle A R, Lyth D H, et al. RhRvD, 1994, 49: 6410
[91] Dine M, Randall L, Thomas S D. PhRvL, 1995, 75: 398
[92] Ooguri H, Vafa C. NuPhB, 2007, 766: 21
[93] Sasaki M, Stewart E D. PThPh, 1996, 95: 71
[94] Malik K A. JCAP, 2007, 03: 004
[95] Arroja F, Mizuno S, Koyama K. JCAP, 2008, 08: 015

[96] Silverstein E, Westphal A. RhRvD, 2008, 78: 106003
[97] McAllister L, Silverstein E, Westphal A. RhRvD, 2010, 82: 046003
[98] Graham P W, Kaplan D E, Rajendran S. PhRvL, 2015, 115: 221801
[99] Espinosa J R, Grojean C, Panico G, et al. PhRvL, 2015, 115: 251803
[100] Cai R G, Pi S, Sasaki M. RhRvD, 2020, 102: 083528
[101] Kobayashi T. RPPh, 2019, 82: 086901
[102] Glavan D, Lin C. PhRvL, 2020, 124: 081301
[103] Gleyzes J, Langlois D, Piazza F, et al. PhRvL, 2015, 114: 211101
[104] Lin C, Mukohyama S, Namba R, et al. JCAP, 2014, 10: 071
[105] Langlois D, Noui K. JCAP, 2016, 02: 034
[106] Ando S, Kusenko A. ApJ, 2010, 722: L39
[107] Neronov A, Vovk I. Science, 2010, 328: 73
[108] Tavecchio F, Ghisellini G, Bonnoli G, et al. MNRAS, 2011, 414: 3566
[109] Essey W, Ando S, Kusenko A. APh, 2011, 35: 135
[110] Finke J D, Reyes L C, Georganopoulos M, et al. ApJ, 2015, 814: 20
[111] Kandus A, Kunze K E, Tsagas C G. PhR, 2011, 505: 1
[112] Subramanian K. Astron Nachr, 2010, 331: 110
[113] Bazrafshan Moghaddam H, McDonough E, Namba R, et al. CQGra, 2018, 35: 105015
[114] Talebian A, Nassiri-Rad A, Firouzjahi H. RhRvD, 2022, 105: 023528
[115] Talebian A, Nassiri-Rad A, Firouzjahi H. RhRvD, 2020, 102: 103508
[116] Fujita T, Mukohyama S. JCAP, 2012, 10: 034
[117] Ferreira R J Z, Jain R K, Sloth M S. JCAP, 2013, 10: 004
[118] Ferreira R J Z, Jain R K, Sloth M S. JCAP, 2014, 06: 053
[119] Demozzi V, Mukhanov V, Rubinstein H. JCAP, 2009, 08: 025
[120] Kanno S, Soda J, Watanabe M A. JCAP, 2009, 12: 009
[121] Green D, Kobayashi T. JCAP, 2016, 03: 010
[122] Fujita T, Namba R. RhRvD, 2016, 94: 043523
[123] Barnaby N, Namba R, Peloso M. RhRvD, 2012, 85: 123523
[124] Giovannini M. RhRvD, 2013, 87: 083004
[125] Fujita T, Yokoyama S. JCAP, 2013, 09: 009
[126] Patel T, Tashiro H, Urakawa Y. JCAP, 2020, 01: 043
[127] Byrnes C T, Hollenstein L, Jain R K, et al. JCAP, 2012, 03: 009
[128] Namjoo M H, Firouzjahi H, Sasaki M. EPL, 2013, 101: 39001
[129] Pattison C, Vennin V, Wands D, et al. JCAP, 2021, 04: 080
[130] Cai Y F, Chen X, Namjoo M H, et al. JCAP, 2018, 05: 012
[131] Firouzjahi H, Nassiri-Rad A, Noorbala M. JCAP, 2019, 01: 040
[132] Cai Y F, Ma X H, Sasaki M, et al. JCAP, 2022, 12: 034
[133] Cai Y F, Ma X H, Sasaki M, et al. PhLB, 2022, 834: 137461
[134] Pi S, Wang J. JCAP, 2023, 06: 018
[135] Harada T, Yoo C M, Nakama T, et al. RhRvD, 2015, 91: 084057
[136] De Luca V, Riotto A. PhLB, 2022, 828: 137035
[137] Gow A D, Assadullahi H, Jackson J H P, et al. EPL, 2023, 142: 49001
[138] Deng H, Vilenkin A. JCAP, 2017, 12: 044
[139] Garriga J, Vilenkin A, Zhang J. JCAP, 2016, 02: 064
[140] Sato K, Sasaki M, Kodama H, et al. PThPh, 1981, 65: 1443
[141] Sato K, Kodama H, Sasaki M, et al. PhLB, 1982, 108: 103
[142] Niikura H, Takada M, Yasuda N, et al. NatAs, 2019, 3: 524
[143] Barnacka A, Glicenstein J F, Moderski R. RhRvD, 2012, 86: 043001
[144] Montero-Camacho P, Fang X, Vasquez G, et al. JCAP, 2019, 08: 031
[145] Carr B J, Kohri K, Sendouda Y, et al. RhRvD, 2016, 94: 044029
[146] Bugaev E, Klimai P. RhRvD, 2011, 83: 083521
[147] Murgia R, Scelfo G, Viel M, et al. PhRvL, 2019, 123: 071102
[148] Tan X H, Yan Y J, Qiu T, et al. ApJ, 2022, 939: L15
[149] Domènech G. Univ, 2021, 7: 398
[150] Franciolini G, Iovino A J, Vaskonen V, et al. PhRvL, 2023, 131: 201401

Nonperturbative Phenomenons of the Very Early Universe: Resonances in Primordial Fluctuations and Non-Gaussian Tails

CAI Yi-fu[1,2] HE Xin-chen[1,2] MA Xiao-han[1,2]

(1 School of Astronomy and Space Science, University of Science and Technology of China, Hefei 230026)
(2 Deep Space Exploration Laboratory/Department of Astronomy, School of Physical Sciences, University of Science and Technology of China, Hefei 230026)

Abstract In the era of precision cosmology, multi-messenger, high-resolution as well as small-scale cosmological observations have provided profound insights into the early universe, while also presenting new challenges to cosmological perturbation theory based on linear approximation and perturbative expansions. In recent years, the search for primordial gravitational waves and primordial black holes has generated significant research interest in the non-linear and non-perturbative processes in the early universe at small scales. This review paper summarizes the progress in understanding the generation of primordial black holes and gravitational waves at cosmological small scales. Specifically, we focus on the application of the resonance effect depicted by the Mathieu equation to study small-scale power spectrum amplification and the induction of observable primordial gravitational waves. Furthermore, we attempt to explore the influence of non-Gaussian tails on primordial black hole formation. Our findings indicate that the resonance effect of the Mathieu equation provides an effective approach to describe non-perturbative and non-linear processes at small scales in the early universe, leading to a better understanding of the mechanisms behind primordial black hole formation and gravitational wave generation. Additionally, the non-perturbative non-Gaussianity may have a significant impact on the formation of primordial black holes.

Key words cosmology: inflation, early universe, primordial gravitational waves, non-Gaussianity, primordial black holes